经国家教委中小学教材
审定委员会审查试用

九年义务教育三年制初级中学教科书

几何

JI HE

第三册

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

九年义务教育三年制初级中学教科书

几 何

第三册

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

(京)新登字 113 号

九年义务教育三年制初级中学教科书
几　何
第 三 册
人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京印刷三厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 7　字数 133 000
1994 年 10 月第 1 版　2000 年 6 月第 6 次印刷
印数 1－94 500

ISBN 7－107－02281－4
G·4117(课)　定价 4.40 元

如发现印装质量问题影响阅读请与北京印刷三厂联系
电话:84275511 转 2146

顾　　问：丁石孙　丁尔升　梅向明　张奎恩
　　张孝达
主　　编：吕学礼　饶汉昌　蔡上鹤
副 主 编：李慧君
编 写 者：蔡上鹤　陈　汶　李慧君　许缓阁
责任编辑：李慧君

说　明

一、这套九年义务教育三年制初级中学教科书《几何》第一至第三册，是根据国家教委颁发的《九年义务教育全日制小学、初级中学课程计划(试行)》、《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用)》编写的.

二、本书从1992年秋季起，在全国二十几个省、自治区、直辖市的数十万学生中进行了试验，并于1994年经国家教委中小学教材审定委员会审查通过.

三、本书是几何第三册，内容包括：解直角三角形，圆，供六三制初中三年级使用，每周3课时.

四、本书在体例上有下列特点：

1. 每章都有一段配有插图的引言，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 在课文中适当穿插了“想一想”、“读一读”、“做一做”等栏目.其中“想一想”是供学生思考的一些问题，“读一读”是供学生阅读的一些短文，“做一做”是供学生课外动手操作的一些实例.这些栏目是为扩大学生知识面、增加趣味性和实践性而设计的，这些都不作为教学要求，只供学生课外参考.

3. 每章后面都安排有“小结与复习”，其中的“学习要求”是对学生学完全章后的要求.

4. 每章最后都配有一套“自我测验题”，供学生自己检查

学完这一章后，是否达到本章的基本要求.

5. 本书的练习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课内用；习题供课内或课外作业用；复习题供复习每章时选用. 其中习题、复习题的题目分为 A、B 两组，A 组属于基本要求范围，B 组带有一定的灵活性，仅供学有余力的学生选用. 每组习题的第 1 题，都反映了这一部分知识的基本要求，可作为预习用，也可作为课后复习用，不要求做出书面答案.

五、本书在编写过程中，征求了部分教师和教研人员的意见，在此向北京市的王占元、明知白、田迺惠、彭广仁，天津市的烟学敏、梁汝芳、吕学林，辽宁省的魏超群，吉林省的李浩明，江苏省的万庆炎，安徽省的薛凌，湖北省的冯善庆等同志表示衷心的感谢.

人民教育出版社中学数学室

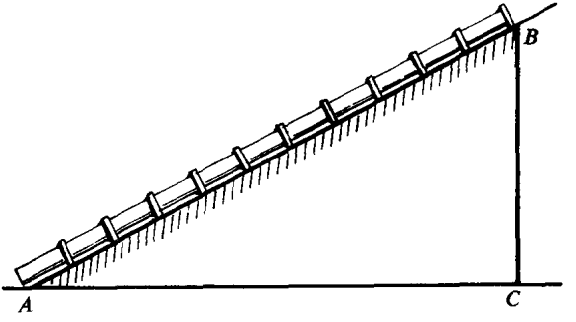
1994 年 10 月

目　录

第六章　解直角三角形 …… 1
一　锐角三角函数 …… 2
6.1　正弦和余弦 …… 2
6.2　正切和余切 …… 20
二　解直角三角形 …… 33
6.3　解直角三角形 …… 33
6.4　应用举例 …… 36
读一读　中国古代有关三角的一些研究 …… 48
6.5　实习作业 …… 49
小结与复习 …… 53
复习题六 …… 56
自我测验六 …… 59
第七章　圆 …… 61
一　圆的有关性质 …… 62
7.1　圆 …… 62
7.2　过三点的圆 …… 71
7.3　垂直于弦的直径 …… 76
7.4　圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系 …… 86
7.5　圆周角 …… 91
7.6　圆的内接四边形 …… 97

二　直线和圆的位置关系 …… 103
7.7　直线和圆的位置关系 …… 103
7.8　切线的判定和性质 …… 106
读一读　为什么车轮做成圆的？ …… 112
7.9　三角形的内切圆 …… 113
*7.10　切线长定理 …… 118
*7.11　弦切角 …… 121
*7.12　和圆有关的比例线段 …… 125
三　圆和圆的位置关系 …… 135
7.13　圆和圆的位置关系 …… 135
7.14　两圆的公切线 …… 140
7.15　相切在作图中的应用 …… 146
四　正多边形和圆 …… 155
7.16　正多边形和圆 …… 155
7.17　正多边形的有关计算 …… 162
7.18　画正多边形 …… 166
7.19　圆周长、弧长 …… 175
7.20　圆、扇形、弓形的面积 …… 179
读一读　关于圆周率π …… 190
7.21　圆柱和圆锥的侧面展开图 …… 192
小结与复习 …… 201
复习题七 …… 206
自我测验七 …… 213

第六章　解直角三角形



修建某扬水站时，要沿着斜坡铺设水管. 从上面的图中看到：斜坡与水平面所成的$\angle A$的度数可以通过测角器测出来，水管AB的长度也可以直接量得，它们是两个已知数.

当水管铺到B处时，设B离水平面的高度为BC. 由于C点不可到达，BC的长度无法直接量得. 怎样利用上面的已知数求得B处离水平面的高度BC呢？

上面的问题可归结为：在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，已知$\angle A$和斜边，求$\angle A$的对边BC. 学了本章知识后，这个问题就很容易解决了.

一　锐角三角函数

6.1　正弦和余弦

我们从三角尺开始来研究上一页中的问题. 在所有不等腰的那块三角尺(图 6-1(1))中,30°角所对的直角边(用 BC 表示,其中$\angle C$ 为直角)都等于斜边(用 AB 表示)的一半,即

$$\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}.$$

这就是说,当$\angle A=30°$时,不管三角尺大小如何,$\angle A$ 的对边与斜边的比值都等于$\frac{1}{2}$. 根据这个比值,已知斜边 AB 的长,就能算出$\angle A$ 的对边 BC 的长.

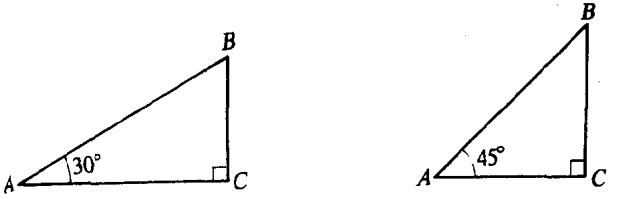


图　6-1

类似地,在所有等腰的那块三角尺(图 6-1(2))中,由勾股定理可得

$$\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{\sqrt{BC^2+BC^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

这就是说，当$\angle A=45°$时，$\angle A$的对边与斜边的比值等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 根据这个比值，已知斜边AB的长，就能算出$\angle A$的对边BC的长.

那么，当锐角A取其他固定值时，$\angle A$的对边与斜边的比值能否也是一个固定值呢？

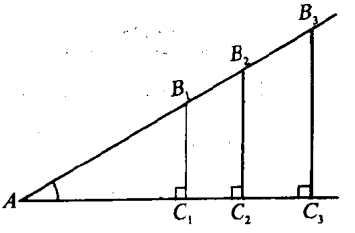


图 6-2

设锐角A取一个固定值，也就是说，我们有许多直角三角形$A_1B_1C_1$，$A_2B_2C_2$，$A_3B_3C_3$，…，它们有一个锐角相等. 我们把点A_1，A_2，A_3，…重合在一起，记作A，并使直角边AC_1，AC_2，AC_3，…落在同一条直线上，则斜边AB_1，AB_2，AB_3，…落在另一条直线上(图 6-2). 容易知道，

$$B_1C_1 /\!/ B_2C_2 /\!/ B_3C_3 /\!/ \cdots,$$

$$\therefore \quad \triangle AB_1C_1 \backsim \triangle AB_2C_2 \backsim \triangle AB_3C_3 \backsim \cdots.$$

$$\therefore \quad \frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\frac{B_3C_3}{AB_3}=\cdots.$$

因此，在这些直角三角形中，$\angle A$的对边与斜边的比值仍是一个固定值.

练　习

在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角. 如果$\angle A=60°$，那么$\angle A$的对边与斜边的比值是多少？

如图6-3，在△ABC中，$\angle C$为直角，我们把锐角A的对边与斜边的比叫做$\angle A$的**正弦**，记作$\sin A$[1]，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}.$$

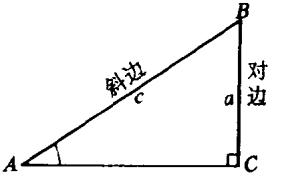


图 6-3

如果我们把$\angle A$的对边BC记作a，$\angle C$的对边AB记作c，那么

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

例如：当$\angle A=30°$时，我们有

$$\sin A=\sin 30°=\frac{1}{2};$$

当$\angle A=45°$时，我们有

$$\sin A=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由于直角三角形中斜边大于直角边，所以在图6-3中，可以得出

$$0<\frac{a}{c}<1.$$

$$\therefore \quad 0<\sin A<1(\angle A\text{为锐角}).$$

---

[1] 注意，这是一个完整的记号，不能看成$\sin\cdot A$. 记号里习惯省去角的符号“$\angle$”，第一个字母“s”要小写. 后面的$\cos A$，$\mathrm{tg}A$，$\mathrm{ctg}A$等也是这样.

例 1 求出图 6-4 所示的 Rt△ABC 中的 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值.

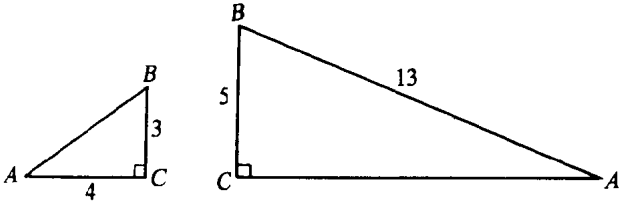


图 6-4

分析：求 $\sin A$ 时，要看$\angle A$ 的对边与斜边的比；求 $\sin B$ 时，要看$\angle B$ 的对边与斜边的比.

解：(1) ∵ 斜边 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$，

∴ $\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{4}{5}$.

(2) $\sin A=\frac{5}{13}$.

∵ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{144}=12$，

∴ $\sin B=\frac{12}{13}$.

与正弦情况相似，可以证明：当锐角 A 取任意一个固定值时，$\angle A$ 的邻边与斜边的比值也是一个固定值.

如图 6-5，在△ABC 中，$\angle C$ 为直角，我们把锐角 A 的邻边与斜边的比叫做$\angle A$ 的**余弦**，记作 $\cos A$，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}.$$

如果我们把$\angle A$的邻边(即$\angle B$的对边)记作b,那么

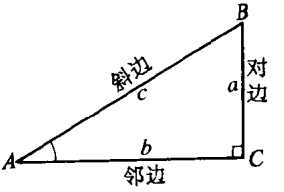


图 6-5

$$\cos A=\frac{b}{c}.$$

$\because$ $0<b<c$,

$\therefore$ $0<\cos A<1$($\angle A$为锐角).

根据图 6-1 和已经学过的知识,我们有:

(1) $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

例 2 求下列各式的值:

(1) $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ$;

(2) $\sqrt{2}\sin 45^\circ-\frac{1}{2}\cos 60^\circ$.

解: (1) $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2};$$

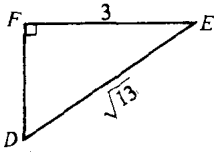
(2) $\sqrt{2}\sin 45^\circ-\frac{1}{2}\cos 60^\circ$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

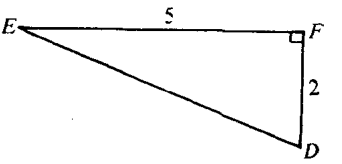
$$=\frac{3}{4}.$$

练　习

1. 求出图中 $\sin D$,$\sin E$ 的值.



(1)



(2)

(第 1 题)

2. (1) 求出图 6-4 中 $\cos A$,$\cos B$ 的值;

(2) 把 $\cos A$,$\cos B$ 的值同 $\sin A$,$\sin B$ 的值(见例 1 的解)进行比较,写出 $\sin A$ 与 $\cos B$ 之间的关系式,以及 $\sin B$ 与 $\cos A$ 之间的关系式.

3. (1) 求出第 1 题图中 $\cos D$,$\cos E$ 的值;

(2) 把 $\cos D$,$\cos E$ 的值同第 1 题中求得的 $\sin D$,$\sin E$ 的值进行比较,写出 $\sin D$ 与 $\cos E$ 之间的关系式,以及 $\sin E$ 与 $\cos D$ 之间的关系式.

4. 求下列各式的值:

(1) $\sin 45°+\cos 45°$;　　(2) $\sin 30°\cdot\cos 60°$;

(3) $0.5-\sin 60°$;　　(4) $\dfrac{\sin 30°}{\cos 30°}$.

我们已经学习了锐角的正弦和余弦,下面再来研究锐角的正弦与余弦之间的关系.我们知道:

$$\sin30°=\frac{1}{2},\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos60°=\frac{1}{2}.$$

由此可以看出：

$$\sin30°=\cos60°,$$

$$\sin45°=\cos45°,$$

$$\sin60°=\cos30°.$$

这就是说，30°，45°，60°这三个特殊角的正弦的值，分别等于它们的余角 60°，45°，30°的余弦的值（反过来说，30°，45°，60°这三个特殊角的余弦的值，分别等于它们的余角 60°，45°，30°的正弦的值）.

那么，对于任意锐角的正弦的值，是否也能等于它的余角的余弦的值呢？观察图 6-5，可知

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},$$

$$\cos B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},$$

$$\therefore\quad \sin A=\cos B.$$

同理可证　　$\cos A=\sin B.$

注意到图 6-5 中，$\angle A+\angle B=90°$，即 $\angle B=90°-\angle A$，所以上面的关系式又可以写成

$$\boldsymbol{\sin A=\cos(90°-A)},$$

$$\boldsymbol{\cos A=\sin(90°-A)}.$$

这就是说，**任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值，任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值.**

例 3 （1）已知 $\sin A=\frac{1}{2}$，且 $\angle B=90°-\angle A$，求 $\cos B$；

（2）已知 $\sin 35°=0.5736$，求 $\cos 55°$；

（3）已知 $\cos 47°6'=0.6807$，求 $\sin 42°54'$.

解：（1）$\cos B=\cos(90°-A)=\sin A=\frac{1}{2}$；

（2）$\cos 55°=\cos(90°-35°)=\sin 35°=0.5736$；

（3）$\sin 42°54'=\sin(90°-47°6')$

$=\cos 47°6'=0.6807$.

练　习

1. 已知 $\angle A$ 与 $\angle B$ 都是锐角.

（1）把 $\cos(90°-A)$ 写成 $\angle A$ 的正弦；

（2）把 $\sin(90°-B)$ 写成 $\angle B$ 的余弦.

2. （1）已知 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\angle B=90°-\angle A$，求 $\sin B$；

（2）已知 $\sin 67°18'=0.9225$，求 $\cos 22°42'$；

（3）已知 $\cos 4°24'=0.9971$，求 $\sin 85°36'$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，先根据下列条件求出 $\angle A$ 的正弦值和余弦值，然后说出 $\angle B$ 的正弦值和余弦值：

（1）$a=2$，$b=1$；　　（2）$a=3$，$c=4$；

（3）$b=2$，$c=\sqrt{29}$；　　（4）$a=4\sqrt{5}$，$b=8$.

我们已经求出了 30°,45°,60°这三个特殊角的正弦值和余弦值.在生产和科研中还常要用到任意锐角的正弦值和余弦值.为了使用上的方便,人们把 0°～90°间每隔 1′的各个角所对应的正弦值和余弦值(一般是含有四个有效数字的近似值)列成表格,叫做"正弦和余弦表".从《中学数学用表》中可以找到这份表格.下面举例说明它的用法.

例 4 查表求 sin37°24′的值.

分析:查"正弦表"就是顺着(从上到下,从左到右)看"正弦和余弦表".从正弦表**左边**的直列里查出 37°,从**顶端**的横行里查出 24′.在 37°所在行和 24′所在列的相交处查得 6074,它实际表示 0.6074(这里整数部分为 0,可从左上角第一个数 0.5736 的整数部分看出),这就是 sin37°24′的值(看下面的示意图).

正　弦

A	0′→	…	24′	…	60′	1′	2′	3′
35° ▼	0.5736		↓				↓	
⋮								
37°	→		6074	…	…	→	5	
⋮								

解: sin37°24′ = 0.6074.

例 5 查表求 $\sin 37°26'$ 的值.

分析：在正弦表顶端的横行里找不到 $26'$. 但 $26'$ 在 $24'\sim 30'$ 间而靠近 $24'$，比 $24'$ 多 $2'$，所以先查出 $\sin 37°24'=0.6074$，再在表右边修正值栏标有 $2'$ 的一列和 $37°$ 所在行的相交处查得 5，它实际表示 0.6074 的最后一个数位上的 5，即 0.0005. 从正弦表中可以看出：**当角度在 $0°\sim 90°$ 间变化时，正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小）**. 于是，把 0.6074 加上 $2'$ 的修正值 0.0005，即得 $\sin 37°26'$ 的值.

解：$\sin 37°24'=$ 0.6074

角度增 $2'$ 值增 0.0005

$\sin 37°26'=$ 0.6079.

例 6 查表求 $\sin 37°23'$ 的值.

分析：$23'$ 在 $18'\sim 24'$ 间而靠近 $24'$，比 $24'$ 少 $1'$，所以先查出 $\sin 37°24'=0.6074$，再查出 $37°$ 所在行 $1'$ 的修正值为 0.0002，应从 0.6074 中减去这个修正值 0.0002.

解：$\sin 37°24'=$ 0.6074

角度减 $1'$ 值减 0.0002

$\sin 37°23'=$ 0.6072.

注意 从表中还可以查得

$$\sin 0°=0,\sin 90°=1.$$

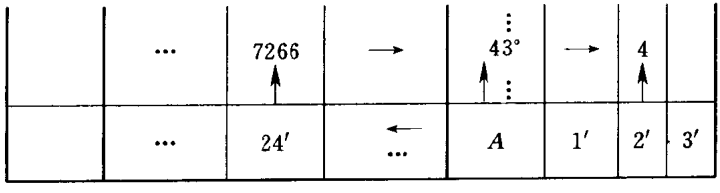
“余弦表”的用法和“正弦表”相似，但要注意以下两点区别：

(1) 查余弦值时，要倒着(从下到上，从右到左)看“正弦和余弦表”，“度”数在表格**右边**的直列里查，“分”数在**底端**的横行里查.

(2) **当角度在 0°～90°间变化时，余弦值随着角度的增大(或减小)而减小(或增大).**

例 7 查表求 cos43°26′和 cos43°22′的值.

分析：26′在 24′～30′间而靠近 24′，比 24′多 2′，所以先查出 cos43°24′，再减去 2′的修正值 0.0004；22′在 18′～24′间而靠近 24′，比 24′少 2′，所以将 cos43°24′的值加上 2′的修正值(看下面的示意图).



余　弦

解：为了便于比较，我们分左、右来写.

cos43°24′ = 0.7266	cos43°24′ = 0.7266
角度增 2′ 值减 0.0004	角度减 2′ 值增 0.0004
cos43°26′ = 0.7262.	cos43°22′ = 0.7270.

注意 从表中还可以查得

$$\cos 0^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0.$$

练　习

1. 查表求下列正弦值，然后按照从小到大的顺序，用“<”号把它们联结起来：

   (1) $\sin 78°, \sin 11°24', \sin 40°48', \sin 0°$；

   (2) $\sin 54', \sin 89°12', \sin 55°6', \sin 23°18'$.

2. 查表求下列正弦值：

   (1) $\sin 48°40'$；　　(2) $\sin 86°19'$；

   (3) $\sin 21°8'$；　　(4) $\sin 70°57'$.

3. 查表求下列余弦值，然后按照从小到大的顺序，用“<”号把它们联结起来：

   $\cos 63°, \cos 90°, \cos 27°12', \cos 85°36', \cos 3°12'$.

4. 查表求下列余弦值：

   (1) $\cos 21°44'$；　　(2) $\cos 54°23'$；

   (3) $\cos 12°31'$；　　(4) $\cos 38°39'$.

反过来，已知一个锐角的正弦值或余弦值，可用“正弦和余弦表”查出这个角的大小.

例 8　已知 $\sin A = 0.2974$，求锐角 A.

分析：从正弦表中找出 0.2974，由这个数所在行向**左**查得 17°，由同一数所在列向**上**查得 18′，即

$$0.2974 = \sin 17°18'.$$

解：查表得 $\sin 17°18' = 0.2974$，所以

$$\text{锐角 } A = 17°18'.$$

例 9 已知 $\cos A=0.7857$，求锐角 A.

分析：在余弦表中找不出 0.7857，但能找出同它最接近的数 0.7859，由这个数所在行向**右**查得 38°，由同一数所在列向**下**查得 12′，即 $0.7859=\cos 38°12'$. 但 $\cos A=0.7857$，比 0.7859 小 0.0002，这说明 $\angle A$ 比 38°12′要大. 由 0.7859 所在行向右查得修正值 0.0002 对应的角度是 1′，所以

$$\angle A=38°12'+1'=38°13'.$$

解：查表得 $\cos 38°12'=0.7859$，所以

$$\begin{aligned} & 0.7859 = \cos 38°12' \\ \text{值减}\ & 0.0002 \quad \text{角度增}\ 1' \\ & 0.7857 = \cos 38°13', \end{aligned}$$

即

$$\text{锐角}\ A=38°13'.$$

例 10 已知 $\cos B=0.4511$，求锐角 B.

分析：从余弦表中找出与 0.4511 最接近的数 $0.4509=\cos 63°12'$. 但 $\cos B=0.4511$，比 0.4509 大 0.0002，由 0.4509 所在的行向右查修正值，只有 0.0003 最接近 0.0002，所对应的角度是 1′，这就是说，从余弦表中只能查得与 0.4511 最接近的数 $0.4512=\cos 63°11'$，我们就取 63°11′作为锐角 B 的大小.

解：$0.4509 = \cos 63°12'$

值增 0.0003　　角度减 $1'$

$0.4512 = \cos 63°11'$.

∴ 锐角 $B=63°11'$.

练　习

1. 查表求下列正弦值或余弦值：

(1) $\sin 10°, \sin 14°36', \sin 2°8', \sin 57°33'$；

(2) $\cos 50°18', \cos 52°20', \cos 75°46', \cos 80°27'$.

2. 已知下列正弦值或余弦值，求锐角 A 或 B：

(1) $\sin A=0.7083, \sin B=0.9371$，

$\sin A=0.3526, \sin B=0.5688$；

(2) $\cos A=0.8290, \cos B=0.7611$，

$\cos A=0.2996, \cos B=0.9931$.

3. 查表求 $\sin 57°$ 与 $\cos 33°$. 所得的值有什么关系？

回到本章引言（第 1 页）中的问题. 设水管 AB 长为 105.2 米，$\angle A=30°6'$，求坡高 BC（保留四个有效数字）. 这个问题变得很容易解决：在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$$\sin A=\frac{BC}{AB},$$

∴ $BC = AB\sin A = 105.2 \cdot \sin 30°6'$

$=105.2\times 0.5015\approx 52.76$（米）.

例 11 如图 6-6，在 Rt $\triangle ABC$ 中，已知 $AC=35$，$AB=45$，求$\angle A$（精确到 1°）.

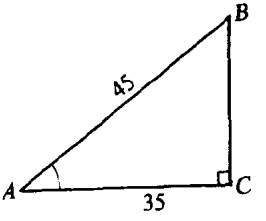


图 6-6

解：$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{35}{45}$

≈ 0.7778，

查表得$\angle A\approx 39°$.

练 习

1. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c.

   (1) 已知 $a=32$，$\angle B=50°$，求 c（保留两个有效数字）；

   (2) 已知 $c=20$，$b=14$，求$\angle A$（精确到 1°）.

2. 判断题：

   (1) 对于任意锐角 α，都有 $0<\sin\alpha<1$ 和 $0<\cos\alpha<1$；（ ）

   (2) 对于任意锐角 α_1，α_2，如果 $\alpha_1<\alpha_2$，那么 $\cos\alpha_1<\cos\alpha_2$；（ ）

   (3) 如果 $\sin\alpha_1<\sin\alpha_2$，那么锐角 $\alpha_1<$锐角 α_2；（ ）

   (4) 如果 $\cos\alpha_1<\cos\alpha_2$，那么锐角 $\alpha_1>$锐角 α_2.（ ）

习 题 6.1

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 已知△ABC 中，$\angle C$ 为直角，那么什么叫做$\angle A$ 的正弦？当$\angle A$ 的大小确定时，它的正弦的值是否会起变化？

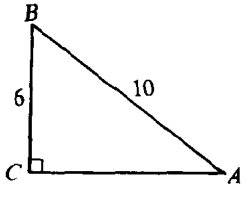
(2) 同第(1)小题，什么叫做$\angle A$ 的余弦？当$\angle A$ 的大小确定时，它的余弦的值是否会起变化？

(3) $\sin 30°$与 $\cos 60°$的值各是什么？$\sin 45°$与 $\cos 45°$呢？$\sin 60°$ 与$\cos 30°$呢？设 $\angle A$ 为一个锐角，则 $\sin A$ 与 $\cos(90°-A)$的值之间有什么关系？

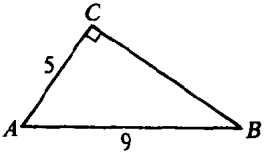
(4) 当$\angle A$ 从 $0°$逐渐增加到 $90°$时，$\sin A$ 的值是否也逐渐增大？$\sin 0°$和 $\sin 90°$的值分别是什么？

(5) 当$\angle A$ 从 $0°$逐渐增加到 $90°$时，$\cos A$ 的值怎样变化？$\cos 0°$和 $\cos 90°$的值分别是什么？

2. 分别写出图中$\angle A$、$\angle B$ 的正弦值和余弦值：



(1)



(2)

(第 2 题)

3. 求下列各式的值：

(1) $\sin45°+\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos45°$；

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin45°+\sin30°$；

(4) $\sin45°\cdot\cos60°+\sin45°$；

(5) $2\cos30°-2\sin60°\cdot\cos45°$；

(6) $\frac{2\sin30°}{4\cos60°-1}$.

4. 把下列各角的正弦(余弦)改写成它的余角的余弦(正弦)：

(1) $\sin36°$；　(2) $\cos72°$；

(3) $\sin63°17'$；　(4) $\cos25°51'$.

5. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c. 先根据下列条件求出$\angle A$的正弦值和余弦值，然后直接写出$\angle B$的正弦值和余弦值：

(1) $a=9,c=15$；　(2) $b=21,c=29$；

(3) $a=2,b=6$；　(4) $a=8,c=17$.

6. 查表求下列正弦值或余弦值：

(1) $\sin28°18'$，$\sin57°43'$，$\sin68°33'$，$\sin72°58'$；

(2) $\cos65°2'$，$\cos10°36'$，$\cos44°15'$，$\cos32°4'$.

7. 查表回答下列问题：

(1) $\sin20°+\sin40°$是否等于$\sin60°$?

(2) $\cos10°+\cos20°$是否等于$\cos30°$?

8. 已知下列正弦值或余弦值，求锐角A或B：

(1) $\sin A=0.6841$，$\cos A=0.3241$，$\sin A=0.5136$；

(2) $\cos B=0.2839$，$\sin B=0.0526$，$\cos B=0.5412$.

9. 在△ABC中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c.

(1) 已知$c=72$，$\angle A=42°$，求a(保留两个有效数字)；

(2) 已知$a=16$，$\angle B=35°$，求c(保留两个有效数字)；

(3) 已知$b=32$，$c=47$，求$\angle B$(精确到1°)；

(4) 已知$a=18$，$c=25$，求$\angle B$(精确到1°)；

(5) 已知$a=24$，$b=19$，求$\angle B$(精确到1°).

B 组

1. 利用图6-5和式子$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，证明在同一个锐角A的正弦、余弦之间存在着以下重要关系式：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$ ❶

2. 设$\angle A$为锐角，利用上题的关系式解决下列问题：

(1) 已知$\sin A=\frac{4}{5}$，求$\cos A$的值(提示：当$\angle A$为锐角时，$\cos A$不可能取负值)；

(2) 已知$\sin A=\frac{5}{13}$，求$\cos A$的值；

(3) 已知$\cos A=\frac{8}{17}$，求$\sin A$的值.

---

❶ $\sin^2 A$表示$(\sin A)^2$，$\cos^2 A$表示$(\cos A)^2$.

6.2 正切和余切

我们已经学习了锐角的正弦和余弦，并已看到了它们的一些应用. 现在再来学习锐角的正切和余切.

与正弦、余弦的情况类似，我们还可以证明，当锐角 A 取任意一个固定值时，它的对边与邻边的比值也是一个固定值.

如图 6-5，我们把$\angle A$ 的对边与邻边的比叫做$\angle A$ 的**正切**，记作 $\mathrm{tg}A$ 或 $\tan A$❶，即

$$\mathrm{tg}A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}};$$

并把$\angle A$ 的邻边与对边的比(即 $\mathrm{tg}A$ 的倒数)叫做$\angle A$ 的**余切**，记作 $\mathrm{ctg}A$ 或 $\cot A$❷，即

$$\mathrm{ctg}A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\frac{1}{\mathrm{tg}A}.$$

当$\angle A$ 取任意一个固定值时，这一比值显然也是一个固定值.

由图 6-5 可以看出：

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad \cos A=\frac{b}{c},$$

$$\mathrm{tg}A=\frac{a}{b},\qquad \mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}.$$

---

❶ ❷ 按照我国目前大多数人的习惯，本书除在介绍电子计算器时使用 $\tan A$、$\cot A$ 以外，都采用前一种记法.

锐角 A 的正弦、余弦、正切、余切都叫做$\angle A$的**锐角三角函数**. 显然，锐角三角函数都不可能取负值.

观察两块三角尺，可知：

$$\mathrm{tg}30^\circ=\frac{30^\circ\text{角的对边}}{30^\circ\text{角的邻边}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathrm{tg}45^\circ=\frac{45^\circ\text{角的对边}}{45^\circ\text{角的邻边}}=\frac{1}{1}=1,$$

$$\mathrm{tg}60^\circ=\frac{60^\circ\text{角的对边}}{60^\circ\text{角的邻边}}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3};$$

$$\mathrm{ctg}30^\circ=\frac{1}{\mathrm{tg}30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3},$$

$$\mathrm{ctg}45^\circ=\frac{1}{\mathrm{tg}45^\circ}=1,$$

$$\mathrm{ctg}60^\circ=\frac{1}{\mathrm{tg}60^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

与前面证明正弦、余弦之间的关系式类似，我们可以利用图 6-5 证明

$$\mathrm{tg}A=\mathrm{ctg}(90^\circ-A),$$

$$\mathrm{ctg}A=\mathrm{tg}(90^\circ-A).$$

这就是说，**任意锐角的正切值等于它的余角的余切值，任意锐角的余切值等于它的余角的正切值.**

现在我们把 0°、30°、45°、60°、90°的三角函数值列表如下：

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	——
$\mathrm{ctg}\alpha$	——	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

例 1 求下列各式的值：

(1) $2\sin30°+3\mathrm{tg}30°+\mathrm{ctg}45°$；

(2) $\cos^2 45°+\mathrm{tg}60°\cos30°$(参看第 19 页脚注).

解：(1) $2\sin30°+3\mathrm{tg}30°+\mathrm{ctg}45°$

$$=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1$$

$$=2+\sqrt{3};$$

(2) $\cos^2 45°+\mathrm{tg}60°\cos30°$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

练　习

1.（口答）tg45°与 ctg45°的值各是多少？tg60°与 ctg30°呢？tg30°与 ctg60°呢？

2. 求下列各式的值：

（1）$\sin30°-3\operatorname{tg}30°+2\cos30°+\operatorname{ctg}90°$；

（2）$2\cos30°+\operatorname{tg}60°-6\operatorname{ctg}60°$；

（3）$5\operatorname{ctg}30°-2\cos60°+2\sin60°+\operatorname{tg}0°$；

（4）$\cos^2 45°+\sin^2 45°$；

（5）$\dfrac{\sin60°-\operatorname{ctg}45°}{\operatorname{tg}60°-2\operatorname{tg}45°}$.

3. 把下列正切或余切改写成余角的余切或正切：

（1）tg52°；　（2）tg36°20′；　（3）tg75°17′；

（4）ctg19°；　（5）ctg24°48′；　（6）ctg15°23′.

下面我们来学习怎样通过查“正切和余切表”求得锐角的正切值和余切值，以及怎样根据一个锐角的正切值或余切值查出这个角的大小. 查正切表，就是顺着（从上到下，从左到右）查“正切和余切表”；查余切表，就是倒着（从下到上，从右到左）查“正切和余切表”. 正切表的用法与正弦表类似，余切表的用法与余弦表类似.

让我们看一些例子.

例 2　查表求下列正切值或余切值：

（1）tg53°49′；　（2）ctg14°32′.

解：(1) $\operatorname{tg}53°48'$ = 1.3663

角度增 $1'$ 值增 0.0008

$\operatorname{tg}53°49'$ = 1.3671；

(2) $\operatorname{ctg}14°30'$ = 3.867

角度增 $2'$ 值减 0.009

$\operatorname{ctg}14°32'$ = 3.858.

例 3 已知下列正切值或余切值，求锐角 A.

(1) $\operatorname{tg}A=1.4036$； (2) $\operatorname{ctg}A=0.8637$.

解：(1) 1.4019 = $\operatorname{tg}54°30'$

值增 0.0017 角度增 $2'$

1.4036 = $\operatorname{tg}54°32'$.

∴ 锐角 $A=54°32'$；

(2) 0.8632 = $\operatorname{ctg}49°12'$

值增 0.0005 角度减 $1'$

0.8637 = $\operatorname{ctg}49°11'$.

∴ 锐角 $A=49°11'$.

练 习

1. 查表求下列正切值或余切值：

(1) $\operatorname{tg}13°12'$，$\operatorname{tg}40°55'$，$\operatorname{tg}54°28'$，$\operatorname{tg}74°3'$；

(2) $\operatorname{ctg}72°18'$，$\operatorname{ctg}56°56'$，$\operatorname{ctg}32°23'$，$\operatorname{ctg}15°15'$.

2. 已知下列正切值或余切值，求锐角 A 或 B：

(1) $\operatorname{tg}B = 0.9131$，　$\operatorname{tg}A = 0.3314$，

$\operatorname{tg}A = 2.220$，　$\operatorname{tg}B = 31.80$；

(2) $\operatorname{ctg}A = 1.6003$，　$\operatorname{ctg}B = 3.590$，

$\operatorname{ctg}B = 0.0781$，　$\operatorname{ctg}A = 180.9$.

例 4　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c. 已知 $a = 15$，$\angle A = 35°$，求 b(保留两个有效数字).

分析：本题已知 a 和 $\angle A$，求 b 时，可选用以下两个关系式中的一个：

(1) 选用 $\operatorname{tg}A = \dfrac{a}{b}$，由此得 $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}A}$，用 a 除以含四个有效数字的数，计算比较麻烦；

(2) 选用 $\operatorname{ctg}A = \dfrac{b}{a}$，由此得 $b = a\operatorname{ctg}A$，用 a 乘以含四个有效数字的数，计算比较方便.

解：$\because$　$\operatorname{ctg}A = \dfrac{b}{a}$，

$\therefore$　$b = a\operatorname{ctg}A = 15 \times \operatorname{ctg}35°$

$= 15 \times 1.4281 \approx 21$.

注意　本题显示了“除法与乘法在一定条件下可以互相转化”，其中“条件”是 $\operatorname{tg}A$ 与 $\operatorname{ctg}A$ 互为倒数. 认真分析和利用这种转化，有时可使计算简便.

做一做

用计算器求锐角三角函数值和由锐角三角函数值求锐角

现在我们介绍如何用“CZ1206型学生用计算器”来求锐角三角函数值和由锐角三角函数值求锐角.请先复习《代数》第二册第10.3小节(第130～136页),再按下面步骤做一做:

按动白键[MODE],使显示器左边出现DEG.

(1) 求整数度数的锐角三角函数值.

例如求sin30°的值,只需先依次按黑键[3]、[0],再按白键[sin],就可以得到答案0.5.

(2) 求非整数度数的锐角三角函数值.

例如求cos24°35′的值,因为60′ = 1°,所以可依次按黑键[2]、[4]、[+]、[3]、[5]、[÷]、[6]、[0]、[=],得24.58333333,再按白键[cos],就可以得到答案0.909357162.

再如求tg47°18′23″的值,因为3600″ = 1°,所以可依次按黑键[4]、[7]、[+]、[1]、[8]、[÷]、[6]、[0]、[+]、[2]、[3]、[÷]、[3]、[6]、[0]、[0]、[=],得47.30638889,然后按白键[tan],就可以得到答案1.083932109.

(3) 由锐角三角函数值求锐角.

例如已知$\sin A = 0.5018$,求锐角A.

先依次按黑键 [·]、[5]、[0]、[1]、[8]，再按桔红键（即第二功能选择键）和白键 [sin]，便得到结果 30.11915867°(这说明精确到 1° 的结果为 30°).

将 30° 记录在纸上，把小数部分化成分，即依次按黑键 [—]、[3]、[0]、[=]、[×]、[6]、[0]、[=]，得 7.14951996，这说明 30.11915867° = 30°7.14951996′(从而精确到 1′ 的结果为 30°7′).

再将 7′ 记录在纸上，把小数部分化成秒，即依次按黑键 [—]、[7]、[=]、[×]、[6]、[0]、[=]，得 8.9711976，这说明 30.11915867° = 30°7′8.9711976″(从而精确到 1″ 的结果为 30°7′9″).

(4) 遇到求锐角的余切值时，可利用关系式

$$\operatorname{ctg}A = \operatorname{tg}(90° - A)$$

来解决.

例如 $\operatorname{ctg}40°5'23'' = \operatorname{tg}49°54'37'' = 1.187970622$.

遇到由锐角的余切值求锐角时，可利用关系式

$$\operatorname{ctg}A = \frac{1}{\operatorname{tg}A}$$

来解决.

例如已知 $\operatorname{ctg}A = 1.7321$，求锐角 A，只要先将 1 除以 1.7321，得 0.577333872，再依次按桔红键和白键 [tan]，就可以得到结果 29.99929539°.

现在请你用计算器解决第 6.1 小节中的例 4 ～ 10 和本小节中的例 2 ～ 3，并同查表所得结果进行对照. 你也可以利用计算器做后面的有关练习题.

练　习

在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c.

(1) 已知c，$\angle A$，求a和b.

(2) 已知b，$\angle A$，求a；已知a，$\angle A$，求b.

(3) 已知a，b怎样求$\angle A$？已知a，c怎样求$\angle A$？已知b，c怎样求$\angle A$？

(4) 已知$a = 51$，$\angle B = 70°$，求b(保留两个有效数字).

(5) 已知$a = 22$，$b = 12$，求$\angle B$(精确到1°).

想一想

我们已经知道，同一个锐角A的正弦和余弦之间有下列关系(参看习题6.1中B组题的第1题)：

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

我们还知道，同一个锐角A的正切和余切之间有下列关系：

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}.$$

那么同一个锐角A的正弦、余弦和正切之间有什么关系呢？人们经过研究得出：

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

请想想这是为什么，并写出这一关系式的推导过程.

习 题 6.2

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，那么什么叫做 $\angle A$ 的正切和余切？当 $\angle A$ 的大小确定时，它的正切和余切的值是否会起变化？

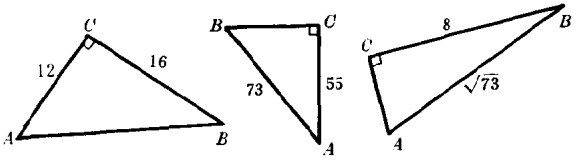
(2) 设 $\angle A$ 为一个锐角，则 $\mathrm{tg}A$ 与 $\mathrm{ctg}(90^\circ - A)$ 的值之间有什么关系？

(3) 当 $\angle A$ 逐渐从 0° 增加到 90° 时，$\mathrm{tg}A$ 的值是否也逐渐增大？$\mathrm{tg}0^\circ$ 与 $\mathrm{tg}90^\circ$ 的值存在吗？如果存在，值是什么？

(4) 当 $\angle A$ 逐渐从 0° 增加到 90° 时，$\mathrm{ctg}A$ 的值怎样变化？$\mathrm{ctg}0^\circ$ 与 $\mathrm{ctg}90^\circ$ 的值存在吗？如果存在，值是什么？

(5) 同一锐角的正切值与余切值的积是什么？

2. 分别写出下图中 $\angle A$，$\angle B$ 的四个锐角三角函数值：



(1) (2) (3)

(第 2 题)

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c.

(1) 已知$a=9, c=15$，求$\angle A$的四个锐角三角函数值；

(2) 已知$b=21, c=29$，求$\angle A$的四个锐角三角函数值；

(3) 已知$a=2, b=6$，求$\angle A$、$\angle B$的四个锐角三角函数值.

4. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c.

(1) $\frac{a}{c}$分别是$\angle A$、$\angle B$的哪一个锐角三角函数？

(2) $\frac{b}{c}$分别是$\angle A$、$\angle B$的哪一个锐角三角函数？

(3) $\frac{a}{b}$分别是$\angle A$、$\angle B$的哪一个锐角三角函数？

5. 利用正切与余切的倒数关系消去下列各式中的分母：

(1) $\frac{1}{\mathrm{tg}35^\circ}$；　　(2) $\frac{1}{\mathrm{ctg}48^\circ 31'}$；

(3) $\mathrm{tg}24^\circ + \frac{1}{\mathrm{ctg}43^\circ}$；　　(4) $3\mathrm{tg}52^\circ \cdot \frac{1}{\mathrm{ctg}52^\circ}$.

6. 求下列各式的值：

(1) $3\mathrm{tg}30^\circ + \mathrm{ctg}45^\circ + \cos 0^\circ - 2\mathrm{tg}45^\circ + 2\sin 60^\circ$；

(2) $2\cos 30^\circ - \sin 90^\circ - 4\mathrm{ctg}30^\circ + 3\mathrm{tg}60^\circ$；

(3) $\frac{\cos 45^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ + \sin 30^\circ}$；　　(4) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$；

(5) $\frac{3\mathrm{ctg}60^\circ}{2\cos^2 30^\circ - 1}$；　　(6) $\frac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ} + \frac{1}{\mathrm{tg}30^\circ}$.

7. 选择题：

(1) 当锐角 $A > 45°$ 时，$\sin A$ 的值(　)

(A) 小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　(B) 大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) 小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(D) 大于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 当锐角 $A > 30°$ 时，$\cos A$ 的值(　)

(A) 小于 $\frac{1}{2}$.　　(B) 大于 $\frac{1}{2}$.

(C) 小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　(D) 大于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 当 $\angle A$ 为锐角，且 $\mathrm{tg}A$ 的值大于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$\angle A$(　)

(A) 小于 30°.　　(B) 大于 30°.

(C) 小于 60°.　　(D) 大于 60°.

(4) 当 $\angle A$ 为锐角，且 $\mathrm{ctg}A$ 的值小于 $\sqrt{3}$ 时，$\angle A$(　)

(A) 小于 30°.　　(B) 大于 30°.

(C) 小于 60°.　　(D) 大于 60°.

8. 查表求下列锐角三角函数值：

(1)$\mathrm{tg}9°19'$，$\mathrm{tg}64°10'$，$\mathrm{tg}75°39'$，$\mathrm{tg}79°51'$；

(2)$\mathrm{ctg}8°28'$，$\mathrm{ctg}16°25'$，$\mathrm{ctg}48°27'$，$\mathrm{ctg}88°44'$；

(3)$\sin 89°32'$，$\cos 38°43'$，$\mathrm{tg}5'$，$\mathrm{ctg}14°27'$.

9. 已知下列锐角三角函数值，求锐角 A 或 B：

(1)$\mathrm{tg}A = 0.7817$，$\mathrm{ctg}B = 1.1106$，$\mathrm{tg}A = 1.0736$；

(2)$\mathrm{ctg}A = 3.267$，$\mathrm{tg}B = 2.378$，$\mathrm{ctg}B = 57.82$；

(3)$\sin A = 0.86276$，$\cos A = 0.\dot{6}$，$\mathrm{tg}A = 53.10$.

10. 求 $\mathrm{tg}44°\mathrm{ctg}45°\mathrm{tg}46°$ 的值.

11. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c，不通过查表解下列问题：

(1) 已知$a=6$，$\angle B=30°$，求b；

(2) 已知$a=8\sqrt{5}$，$b=8\sqrt{15}$，求$\angle B$.

12. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c.

(1) 已知$a=5.2$，$b=3.4$，求$\angle A$(精确到1°)；

(2) 已知$b=2.7$，$\angle B=28°$，求a(保留两个有效数字).

B 组

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c，解下列问题(边长保留三个有效数字，角精确到1′)：

(1) 已知$b=15.6$，$c=18.4$，求$\angle B$；

(2) 已知$a=240$，$\angle A=32°57'$，求b；

(3) 已知$c=300$，$\angle A=36°7'$，求a；

(4) 已知$a=14.3$，$b=26.8$，求$\angle B$.

2. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边分别为a、b、c，且$b=2a$，求$\angle A$(精确到1′).

3. 已知矩形的对角线与一条边的夹角为44°，这条边的长为16cm，求：

(1) 矩形的对角线的长(精确到1cm)；

(2) 矩形的面积(精确到10cm²).

二　解直角三角形

6.3　解直角三角形

在直角三角形中，除直角外，一共有5个元素，即3条边和2个锐角. 由直角三角形中除直角外的已知元素，求出所有未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

我们知道，如果 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，那么除直角 C 外，其余的5个元素之间有以下关系：

(1) 三边之间的关系

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{(勾股定理)};$$

(2) 锐角之间的关系

$$\angle A + \angle B = 90°;$$

(3) 边角之间的关系

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}, \quad \cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\angle A \text{ 的对边}},$$

其中 A 可以都换成 B.

利用这些关系，知道其中的2个元素(至少有1个是边)，就可以求出其余的3个未知元素.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，且 $c = 287.4$，$\angle B = 42°6'$，解这个三角形.❶

解：(1) $\angle A = 90° - 42°6' = 47°54'$.

(2) $\because \quad \cos B = \dfrac{a}{c}$,

$\therefore \quad a = c\cos B$

$= 287.4 \times 0.7420$

≈ 213.3.

(3) $\because \quad \sin B = \dfrac{b}{c}$,

$\therefore \quad b = c\sin B$

$= 287.4 \times 0.6704$

≈ 192.7.

例 2 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$a = 104.0$，$b = 20.49$，解这个三角形.

解：(1) $\because \quad \mathrm{tg}A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{104.0}{20.49} \approx 5.076$,

查表得 $\angle A = 78°51'$.

---

❶ 在本章中，此后如无特别说明，“在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c”简写为“在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中”. 解直角三角形进行近似计算时，边长保留四个有效数字，角精确到 $1'$.

(2) $\angle B = 90° - 78°51' = 11°9'$.

(3) $\because \quad \sin A = \frac{a}{c}$,

$\therefore \quad c = \frac{a}{\sin A} = \frac{104.0}{0.9812} \approx 106.0$.

例1中的b和例2中的c都可以利用勾股定理来计算，这时要查平方表和平方根表. 这样做有时会比上面用含四个有效数字的数乘(或除)以另一含四个有效数字的数要方便一些，但先后要查两次表，并做一次加法(或减法).

练　习

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中：

(1) 如果已知$\angle A$、c，写出解$\triangle ABC$求未知元素的过程；

(2) 如果已知a，b，写出解$\triangle ABC$求未知元素的过程；

(3) 如果已知b，$\angle A$，写出解$\triangle ABC$求未知元素的过程；

(4) 如果已知a，$\angle B$，写出解$\triangle ABC$求未知元素的过程.

2. 根据下列条件解直角三角形：

(1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$a = 30.01$，$\angle B = 80°24'$；

(2) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$c = 0.8328$，$b = 0.2954$.

6.4 应用举例

解直角三角形的应用十分广泛，下面举一些例子.

如图 6-7，当我们进行测量时，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的叫做仰角，在水平线下方的叫做俯角.

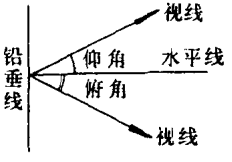


图 6-7

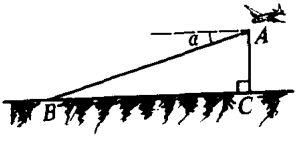


图 6-8

例 1 如图 6-8，某飞机于空中 A 处探测到目标 C，此时飞行高度 $AC = 1200$ 米，从飞机上看地平面控制点 B 的俯角 $\alpha = 16°31'$，求飞机 A 到控制点 B 的距离(精确到 1 米).

分析：由图 6-8 可见，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 AC，$\angle B = \angle\alpha$，所以可以用锐角三角函数求出 AB.

解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

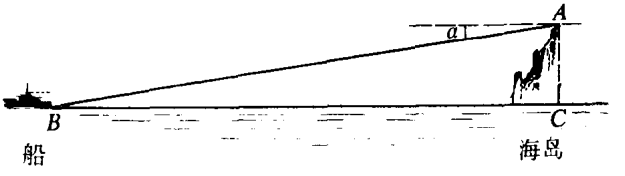
$$\sin B = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore\ AB = \frac{AC}{\sin B} = \frac{1200}{0.2843} \approx 4221(\text{米}).$$

答：飞机 A 到控制点 B 的距离约为 4221 米.

练　习

如图，某海岛上的观察所 A 发现海上某船只 B 并测得其俯角 $\alpha = 8°14'$. 已知观察所 A 的标高（当水位为 0m 时的高度）为 43.74m，当时水位为 $+2.63$m，求观察所 A 到船只 B 的水平距离 BC（精确到 1m）.



例 2　如图 6-9，厂房屋顶人字架（等腰三角形）的跨度为 10 米，$\angle A = 26°$，求中柱 BC（C 为底边中点）和上弦 AB 的长（精确到 0.01 米）.

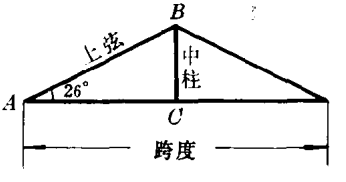


图　6-9

分析：由题意可知，$\triangle ABC$ 为直角三角形，其中 $\angle C = 90°$，$\angle A = 26°$，$AC = 5$ 米，可利用解 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的方法求出 BC 和 AB.

解：∵　　$\mathrm{tg}A = \dfrac{BC}{AC}$，

∴　　$BC = AC \cdot \mathrm{tg}A = 5 \times \mathrm{tg}26°$

$= 5 \times 0.4877 \approx 2.44$（米）.

$$\because \quad \cos A = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \quad AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{5}{\cos 26°}$$

$$= \frac{5}{0.8988} \approx 5.56(\text{米}).$$

答：中柱 BC 约长 2.44 米，上弦 AB 约长 5.56 米.

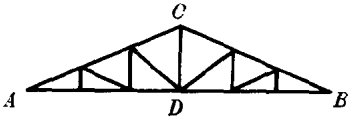
在例 2 中，求出中柱 BC 长为 2.44 米后，也可利用正弦计算上弦 AB 的长，即由 $\sin A = \frac{BC}{AB}$，得

$$AB = \frac{BC}{\sin A} \approx \frac{2.44}{\sin 26°} = \frac{2.44}{0.4384} \approx 5.57(\text{米}).$$

这个结果与例 2 中所得的结果相比较，出现了 0.01 米的差异. 这两个结果都可认为是正确的.

练　习

如图，某厂车间的人字屋架为等腰三角形，跨度 $AB = 12$ 米，$\angle A = 22°$，求中柱 CD 和上弦 AC 的长(精确到 0.01 米).



例 3 燕尾槽的横断面是等腰梯形. 图 6-10 是一燕尾槽的横断面，其中燕尾角 B 是 55°，外口宽 AD 是 180mm，燕尾槽的深度是 70mm. 求它的里口宽 BC(精确到 1mm).

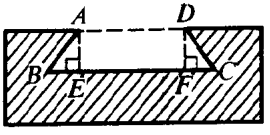


图 6-10

分析：连结 AD，并分别作 AE、DF 垂直于 BC，则 $AD = EF$，$BE = FC$. 又 $BC = BE + EF + FC = 2BE + AD$. 由于 AD 已知，只要求出 BE，这个问题就解决了.

解：作 $AE \perp BC$，$DF \perp BC$. 那么在 Rt$\triangle ABE$ 中，

$$\operatorname{ctg}B = \frac{BE}{AE},$$

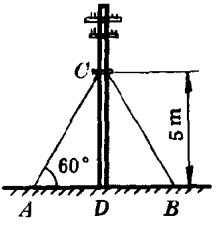
$$\therefore \quad BE = AE \cdot \operatorname{ctg}B$$
$$= 70 \times 0.7002$$
$$\approx 49.0(\text{mm}).$$

$$\therefore \quad BC = 2BE + AD$$
$$\approx 2 \times 49.0 + 180$$
$$= 278(\text{mm}).$$

答：燕尾槽的里口宽 BC 约为 278mm.

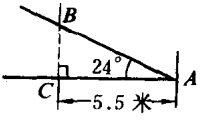
练　习

如图，在离地面高度 5 米处引拉线固定电线杆，拉线和地面成 60° 角，求拉线 AC 的长以及拉线下端点 A 与杆底 D 的距离 AD（精确到 0.01 米）.



例 4　如图 6-11，在山坡上种树，要求株距（相邻两树间的水平距离）是 5.5 米. 测得斜坡的倾斜角是 24°，求斜坡上相邻两树间的坡面距离是多少米（精确到 0.1 米）.

(1)



(2)

图　6-11

分析：如图 6-11(2)，$\angle A = 24°$，水平距离 $AC = 5.5$ 米，$BC \perp AC$，$\triangle ABC$ 是直角三角形. 只要解 $\triangle ABC$ 求出 AB，问题就解决了.

解：在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$$\cos A = \frac{AC}{AB},$$

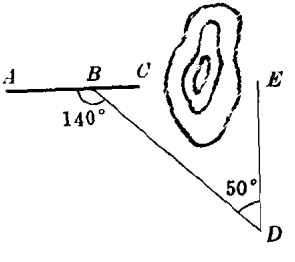
$$\therefore \quad AB = \frac{AC}{\cos A}$$

$$= \frac{5.5}{0.9135} \approx 6.0(\text{米}).$$

答：斜坡上相邻两树间的坡面距离约是 6.0 米.

练　习

如图，沿 AC 方向开山修渠，为了加快施工进度，要在小山的另一边同时施工. 从 AC 上的一点 B 取 $\angle ABD = 140°$，$BD = 520$ 米，$\angle D = 50°$，那么开挖点 E 离 D 多远(精确到 0.1 米)，正好能使 A，C，E 成一直线？



在筑坝、开渠、挖河和修路时，设计图纸上都要注明斜坡的倾斜程度. 如图 6-12，我们通常把坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比叫做坡度（或叫做坡比），用字母 i 表示，即

$$i = \frac{h}{l}.$$

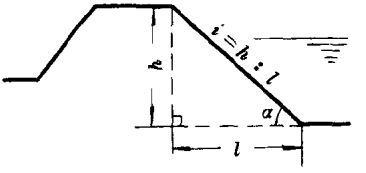


图 6-12

坡度一般写成 $1:m$ 的形式，如 $i = 1:5$ $\left(\text{即 } i = \frac{1}{5}\right)$.

如果把坡面与水平面的夹角记作 α（叫做坡角），那么

$$i = \frac{h}{l} = \operatorname{tg}\alpha.$$

显然，坡度越大（于是 α 角越大），坡面就越陡.

例 5 如图 6-13，水库大坝的横断面是梯形，坝顶宽 6m，坝高 23m，斜坡 AB 的坡度 $i = 1:3$，斜坡 CD 的坡度 $i' = 1:2.5$. 求斜坡 AB 的坡角 α，坝底宽 AD 和斜坡 AB 的长（精确到 0.1m）.

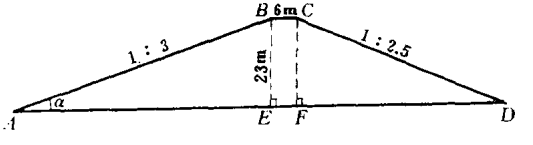


图 6-13

解：作 $BE \perp AD, CF \perp AD$. 在 Rt$\triangle ABE$ 和 Rt$\triangle CDF$ 中，

$$\frac{BE}{AE} = 1:3, \qquad \frac{CF}{FD} = 1:2.5,$$

$$\therefore \quad AE = 3BE = 3 \times 23 = 69(\text{m}),$$

$$FD = 2.5CF = 2.5 \times 23 = 57.5(\text{m}).$$

$$\therefore \quad AD = AE + EF + FD = 69 + 6 + 57.5$$

$$= 132.5(\text{m}).$$

因为斜坡 AB 的坡度 $i = \text{tg}\alpha = \frac{1}{3} \approx 0.3333$，查表得

$$\alpha \approx 18°26'.$$

$$\because \quad \frac{BE}{AB} = \sin\alpha,$$

$$\therefore \quad AB = \frac{BE}{\sin\alpha} = \frac{23}{0.3162}$$

$$\approx 72.7(\text{m}).$$

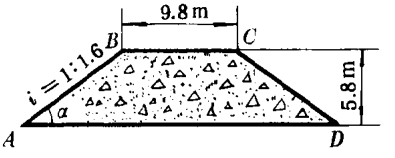
答：斜坡 AB 的坡角 α 约为 $18°26'$，坝底宽 AD 为 132.5 米，斜坡 AB 的长约为 72.7 米.

在例 5 中，也可由 $\frac{BE}{AE} = 1:3$，得 $\frac{BE}{AB} = 1:\sqrt{10}$，求得

$$AB = \sqrt{10} \cdot BE = \sqrt{10} \times 23 \approx 72.7(\text{m}).$$

练　习

如图，一铁路路基的横断面为等腰梯形 $ABCD$，根据图示数据计算出路基下底宽 AD（精确到 0.1 米）和坡角 α.



从上面可以看出，在做解直角三角形的应用题时，要注意以下各点：

1. 弄清仰角、俯角、坡度、坡角、水平距离、垂直距离、水位等概念的意义；

2. 认真分析题意，画图并找出要求解的直角三角形. 有些图形虽然不是直角三角形，但可添加适当的辅助线把它们分割成一些直角三角形和矩形（包括正方形）；

3. 选择合适的边角关系式，使运算尽可能简便，并且不容易出错；

4. 按照题目中已知数的精确度进行近似计算，并按照题目中要求的精确度确定答案以及注明单位.

习 题 6.3

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

   (1) 什么叫做解直角三角形？直角三角形中除直角外的 5 个元素之间的关系式可分成几组？每一组有什么名称？通过每一组关系式，可以由什么求出什么？

   (2) 什么叫做仰角、俯角？什么叫做坡度、坡角？

2. 仿照下表第二行填空. 在 Rt$\triangle ABC$ 中：

锐角三角函数	一条边等于另一条边乘以锐角三角函数	一条边等于另一条边除以锐角三角函数
$\sin A=\frac{a}{c}$	$a=c\sin A$	$c=\frac{a}{\sin A}$
$\cos A=$		
$\mathrm{tg}A=$		
$\mathrm{ctg}A=$		
$\sin B=$		
$\cos B=$		
$\mathrm{tg}B=$		
$\mathrm{ctg}B=$		

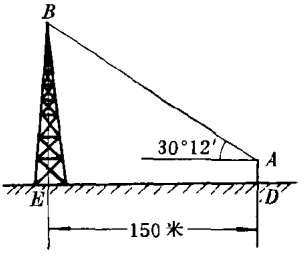
3. 根据下列条件解直角三角形：

(1) 在 Rt△ABC 中，$c = 8.035$，$\angle A = 38°19'$；

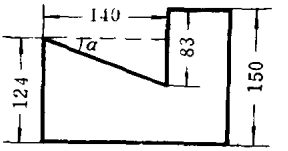
(2) 在 Rt△ABC 中，$b = 7.234$，$\angle A = 7°20'$；

(3) 在 Rt△ABC 中，$a = 25.64$，$b = 32.48$.

4. 如图，在离铁塔 150 米的 A 处，用测角仪器测得塔顶的仰角为 30°12′，已知测角仪器高 $AD = 1.52$ 米，求铁塔高 BE（精确到 0.1 米）.



（第 4 题）



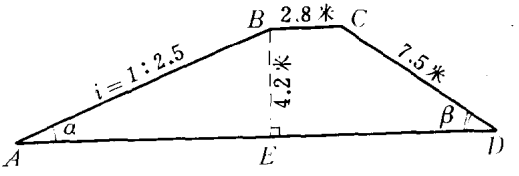
（第 5 题）

5. 在加工如图的垫模时，需计算斜角 α，根据图示数据求 α.

6. 如图，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$，根据图示数据求：

(1) 坡角 α 和 β；

(2) 坝底宽 AD 和斜坡 AB 的长（精确到 0.1 米）.

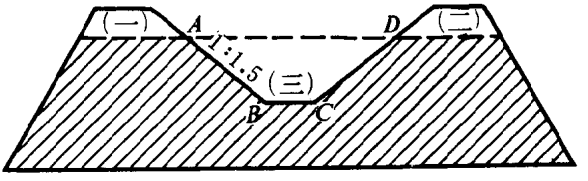


（第 6 题）

7. 如图，利用土埂修筑一条渠道：在埂中间挖去深为 0.6m 的一块（图中（三）是挖去部分的横断面），把挖出来的土填在两旁（图中（一）、（二）是填土部分的横断面）. 已知渠道内坡度为 1∶1.5，渠道底面宽 BC 为 0.5m，求：

（1）横断面（等腰梯形）$ABCD$ 的面积；

（2）修一条长 100m 的渠道要挖出的土方数.



（第 7 题）

8. 等腰三角形的顶角为 78°4′，底边上的高为 28.5cm，求腰长和面积（保留三个有效数字）.

9. 在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 内以 A 为一个顶点作等边三角形，使它的另外两个顶点 E、F 分别位于 BC 和 CD 上，求这个等边三角形 AEF 的边长（用锐角三角函数表示）.

B 组

1. （1）判定两个直角三角形全等，要具备什么条件？

（2）为什么在直角三角形中，已知一条边和一个锐角，或已知两条边，就能解这个直角三角形？

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，分别写出所有等于 $\angle A$ 的正弦、余弦、正切和余切的线段的比.

读一读

中国古代有关三角的一些研究

三角学是一门研究三角形边和角的关系、三角函数及其间的关系的一门学科. 我国对三角早有研究. 早在春秋战国时期，齐国出了一本有名的工具书，名叫《考工记》，书中记载了几种特殊角的名称：90°角叫做“矩”，45°角叫做“宣”，135°角叫做“磬(qìng)折”等.

在公元前1世纪成书的数学著作《周髀算经》里，已记载了平面测量的内容，其中包括利用直角三角形和勾股定理来解决一些实际问题.

公元3世纪我国著名数学家刘徽在计算单位圆(半径等于单位长度的圆)的内接(顶点都在同一圆上)正六边形等图形的边长时，以及公元13世纪赵友钦在计算圆内接正方形的边长时，实际上已求得了某些特殊角的正弦值. 在我国古代历法书中关于根据竿的不同影长来确定季节和时令的方法的记载，实际上已构成了一份余切值表.

16世纪，外国的三角知识传入我国，那时已有正弦、余弦、正切、余切、正割、余割及正矢、余矢等八个名称，总称八线.

17世纪，第一部中文的平面三角学(邓玉函等编译的《大测》2卷)和球面三角学(徐光启等编译的《测量全义》10卷)相继问世.

6.5 实习作业

“实习作业”就是应用所学知识，通过实际操作，解决一些实际问题. 现在我们应用解直角三角形的知识，解决有关测量倾斜角和底部可以到达物体的高度问题.

1. 测量倾斜角

在没有精密经纬仪的条件下，可以用测倾器（又叫做垂直测角仪）来测量倾斜角.

(1) 测倾器的制作

简易测倾器可以自己制作. 用木板做一个半圆刻度盘，半径是 15 ～ 20cm(90° ～ 0° ～ 90°)，用螺钉、螺母把它和一根长 130cm 的木杆联在一起，并在半圆圆心处挂一铅垂线，直径的两端钉两个标针(图 6-14). 当木杆与地面垂直时，通过标针的视线是水平的.

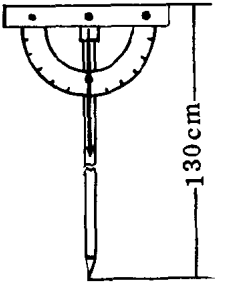


图 6-14

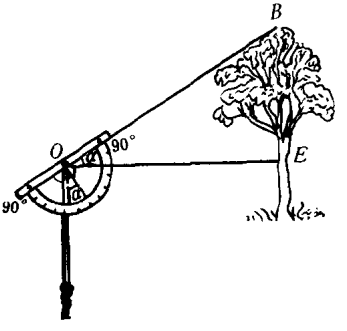


图 6-15

(2) 用测倾器测量倾斜角的方法

(i) 把测倾器插在一点(图 6-15),使测倾器的木杆的中心线与铅垂线重合,这时标针连线在水平位置;

(ii) 转动半圆刻度盘,使视线通过两标针,并且刚好落在目标物顶部 B 处;

(iii) 根据同角的余角相等可以知道,所测倾斜角即仰角 $\angle EOB$ 等于铅垂线与零度线间所夹的角. 读出铅垂线所指的度数,就是 $\angle EOB$ 的度数.

2. 测量底部可以到达的物体的高度

如图 6-16,以测量旗杆 AB 的高度为例,如果从测点到旗杆的底部的水平距离可以直接量得,高度 AB 就可以测出. 具体如下:

(1) 工具 —— 测倾器.

(2) 步骤:

(i) 在测点 D 处安置测倾器,测得旗杆顶的仰角 $\angle ACE = \alpha$;

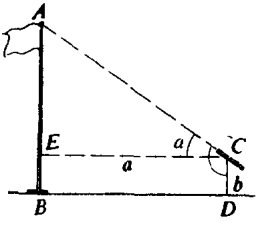


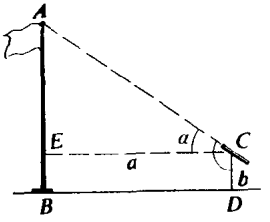
图 6-16

(ii) 量出仪器的高 $CD = EB = b$,和测点 D 到旗杆的水平距离 $BD = EC = a$;

(iii) 按照 $AB = a\mathrm{tg}\alpha + b$ 的关系式,就可求得旗杆的高 AB(这是因为 $AB = AE + b = a\mathrm{tg}\alpha + b$).

(3) 填写实习报告如下:

实习报告　　____年　____月　____日

<table>
<tr><td>题目</td><td colspan="4">测量底部可以到达的旗杆高</td></tr>
<tr><td>测量目标</td><td colspan="4"> 
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">测得数据</td><td>测量项目</td><td>第一次</td><td>第二次</td><td>平均值</td></tr>
<tr><td>BD 的长</td><td>20.15m</td><td>19.93m</td><td>20.04m</td></tr>
<tr><td>测倾器的高</td><td>$CD=1.23$m</td><td>$CD=1.19$m</td><td>$CD=1.21$m</td></tr>
<tr><td>倾斜角</td><td>$\alpha=28°15'$</td><td>$\alpha=27°45'$</td><td>$\alpha=28°$</td></tr>
<tr><td>计算</td><td colspan="4">旗杆高 AB(精确到 0.1 米)
$AB=AE+EB$.
$AE=CE\mathrm{tg}\alpha, BE=CD, CE=BD$.
$\therefore AB=BD\cdot\mathrm{tg}\alpha+CD=20.04\times\mathrm{tg}28°+1.21$.
查表知 $\mathrm{tg}28°=0.5317$.
$\therefore AB=20.04\times0.5317+1.21\approx11.9$(m).</td></tr>
<tr><td>负责人及参加人员</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>计算者及复核者</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>指导教师审核意见</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>备注</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

有条件的学校可以使用经纬仪，也可选择其他实习内容.

练　习

1. 制作测倾器.

2. 用测倾器测量底部可以到达的物体的高度(例如学校里的旗杆、工厂的烟囱、建筑物以及电线杆等的高度),并填写实习报告.

实习报告

____年　____月　____日

<table>
<tr><td>题目</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>测量目标</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">测得数据</td><td>测量项目</td><td>第一次</td><td>第二次</td><td>平均值</td></tr>
<tr><td>测点到被测物体的距离</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>测倾器的高</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>倾斜角</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>计算</td><td colspan="4">物体的高度(精确到 0.1 米)</td></tr>
<tr><td>负责人及参加人员</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>计算者及复核者</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>指导教师审核意见</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>备注</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

小结与复习

本章主要研究锐角三角函数的概念、直角三角形中边角间的关系、直角三角形的解法及其应用.

一、内容提要

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中：

(1) $\angle A$ 的正弦$\sin A=\frac{a}{c}$，$\angle A$ 的余弦$\cos A=\frac{b}{c}$，

$\angle A$ 的正切$\mathrm{tg}A=\frac{a}{b}$，$\angle A$ 的余切 $\mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}$；

(2) $\sin(90^\circ-A)=\cos A$，$\cos(90^\circ-A)=\sin A$，

$\mathrm{tg}(90^\circ-A)=\mathrm{ctg}A$，$\mathrm{ctg}(90^\circ-A)=\mathrm{tg}A$，

式中 $90^\circ-A$ 可以都用 B 来代替.

2. 一些特殊角的三角函数值：

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	——
$\mathrm{ctg}\alpha$	——	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3. 锐角三角函数值可通过查表或利用计算器求得；反过来，已知锐角的某种三角函数值，可通过查表或利用计算器求出这个锐角的大小.

4. 由直角三角形中除直角外的已知元素，求出所有未知元素的过程，叫做解直角三角形. 这些已知元素应该有 2 个，其中至少有 1 个是边.

在解直角三角形时，要运用上面第 1 条中的关系式和第 2 条中的特殊值，要经常查表，有时还要运用勾股定理，关键是适当选用恰含一个未知数的关系式.

二、学习要求

1. 知道锐角三角函数的概念，能够正确地用 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{ctg}\alpha$ 表示直角三角形中两条边的比.

2. 熟记 30°，45°，60° 角的锐角三角函数值，会计算含有特殊锐角三角函数值的式子，会由一个特殊锐角的三角函数值直接说(写) 出这个锐角的大小.

3. 会正确地使用“正弦和余弦表”、“正切和余切表”，由已知锐角求它的三角函数值，由已知锐角的某种三角函数值求这个锐角的大小.

4. 会运用勾股定理、直角三角形的两个锐角互余及锐角三角函数解直角三角形.

5. 会用解直角三角形的有关知识来解决某些简单的实际问题.

三、需要注意的几个问题

1. 本章所研究的锐角三角函数，所涉及的角都是锐角，它们都是 0° 与 90° 之间的角. 研究这样的角，可以与直角三角形直接联系起来，容易得出

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \cos(90^\circ - A) = \sin A,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - A) = \operatorname{ctg} A, \operatorname{ctg}(90^\circ - A) = \operatorname{tg} A$$

等四个公式. 这四个公式十分重要，今后还要经常用到.

2. 解直角三角形时，是用三角知识，通过数值计算，去求出图形中的某些边的长度或角的大小. 这是数形结合的一种方式. 所以在分析问题时，最好画出它的平面或截面示意图，按照图中边角之间的关系去进行计算，这样可以帮助思考，防止出错.

有些图形虽然不是直角三角形，但可添加适当的辅助线把它们分割成一些直角三角形和矩形，从而可以运用解直角三角形的有关知识去解决这些图形中求边角的问题. 另外，在考虑这些组合图形时，要根据题目中的条件和要求来确定边与边、角与角是相加还是相减.

3. 对实习作业要重视. 通过实习作业进一步培养自己分析和解决简单实际问题的能力，并养成用数学的意识.

复习题六

A 组

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中：

(1) 已知 $a=5, b=\sqrt{7}$，求 $\angle A$ 的四个锐角三角函数值；

(2) 已知 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}$，求 $\angle A$ 的四个锐角三角函数值.

2. 求下列各式的值：

(1) $\mathrm{tg}^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ + \mathrm{tg}45^\circ \sin 90^\circ - \mathrm{tg}60^\circ + \cos^2 30^\circ$；

(2) $\cos 60^\circ - \sin^2 45^\circ + \frac{3}{4}\mathrm{tg}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ$；

(3) $\dfrac{\cos 0^\circ}{\mathrm{tg}45^\circ - \sin 60^\circ + \mathrm{ctg}90^\circ}$；　(4) $\dfrac{\mathrm{tg}30^\circ \cos 45^\circ \sin 60^\circ}{\mathrm{tg}0^\circ + \mathrm{ctg}60^\circ \sin 30^\circ}$.

3. 求下列锐角三角函数值：

(1) $\sin 17^\circ 39'$, $\cos 76^\circ 44'$, $\mathrm{tg}86^\circ 7'$, $\mathrm{ctg}44^\circ 57'$；

(2) $\sin 70^\circ 17'$, $\cos 12^\circ 56'$, $\mathrm{tg}28^\circ 28'$, $\mathrm{ctg}79^\circ 28'$.

4. 已知下列锐角三角函数值，求锐角 A：

(1) $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A = 0.6581$, $\mathrm{tg}A = 35.43$；

(2) $\sin A = 0.0732$, $\cos A = 0.3412$, $\mathrm{ctg}A = 2.746$.

5. 设 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，求证：

(1) $\sin \dfrac{A+B}{2} = \cos \dfrac{C}{2}$；　(2) $\mathrm{tg} \dfrac{B+C}{2} = \mathrm{ctg} \dfrac{A}{2}$.

6. 平行四边形的两邻边长分别为 62.31cm 及 35.24cm，它们之间所夹的锐角为 $57^\circ 40'$，求这个平行四边形的两条高的长和它的面积.

7. 选择题：

(1) 如果 $\angle A$ 为锐角，且 $\cos A = \frac{1}{5}$，那么(　)

(A) $0° < \angle A \leqslant 30°$.　　(B) $30° < \angle A \leqslant 45°$.

(C) $45° < \angle A \leqslant 60°$.　　(D) $60° < \angle A < 90°$.

(2) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，下列式子中不一定成立的是(　)

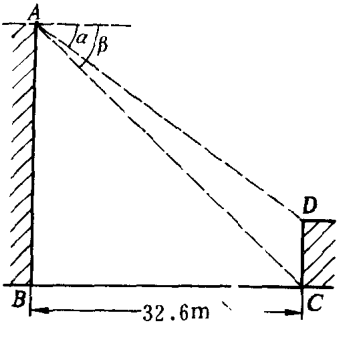
(A) $\sin A = \sin B$.　　(B) $\cos A = \sin B$.

(C) $\sin A = \cos B$.　　(D) $\sin(A + B) = \sin C$.

8. 求证 $\square ABCD$ 的面积 $S = AB \cdot BC \cdot \sin B$($\angle B$ 为锐角).

9. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，斜边 AB 上的高 $CD = 21\text{cm}$，$AD = 18\text{cm}$，解这个三角形(边长保留两个有效数字，角度精确到 1°).

10. 如图，两建筑物的水平距离为 32.6 米，从 A 点测得 D 点的俯角 α 为 35°12′，测得 C 点的俯角 β 为 43°24′. 求这两个建筑物的高(精确到 0.1 米).

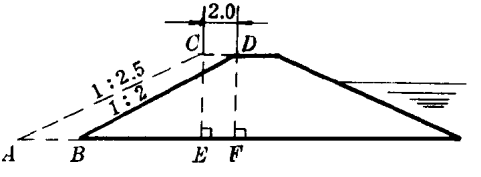


(第 10 题)

B 组

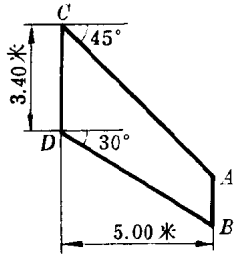
1. 在 Rt△ABC 中，$\angle A = 32°20'$，角平分线 $AT = 14.7$cm，求直角边 BC 和斜边 AB 的长(保留三个有效数字).

2. 如图，沿水库拦水坝的背水坡将坝面加宽 2.0 米，坡度由原来的 1∶2 改成 1∶2.5. 已知原背水坡长 $BD = 13.4$ 米，坝长 90 米，求完成这一工程需多少方土(保留两个有效数字).

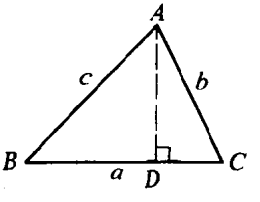


(第 2 题)

3. 某型号飞机的机翼形状如图所示. 根据图中数据计算 AC、BD 和 AB 的长度(保留三个有效数字).



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，在锐角三角形 ABC 中，求证 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$(提示：作 BC 边上的高 AD).

自我测验六

（满分 100 分，时间 45 分）

1.（每空 3 分，共 36 分）填空：

(1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle C$ 所对的边长分别为 $\sqrt{7}$，$\sqrt{19}$，则 $\sin A =$ _____，$\cos B =$ _____，$\operatorname{tg} B =$ _____，$\operatorname{ctg} A =$ _____；

(2) $2\sin 30° - 2\cos 60° + \operatorname{tg} 45° =$ _____，

$\sin^2 45° + \operatorname{ctg} 60° \cos 30° =$ _____，

$\dfrac{1 - \cos 60°}{\sin 60°} \cdot \operatorname{ctg} 30° =$ _____，

$\operatorname{ctg} 44° \operatorname{ctg} 45° \operatorname{ctg} 46° =$ _____；

(3) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$3a = \sqrt{3}b$，则 $\angle A =$ _____°，$\sin A =$ _____；

(4) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，如果已知 b 和 $\angle A$，那么 $a =$ _____，$c =$ _____（用锐角三角函数表示）.

2.（每题 3 分，共 18 分）判断题：

(1) 所有的锐角三角函数值都是正数；（ ）

(2) $\cos 30° + \cos 60° = \cos 90°$；（ ）

(3) 解直角三角形只需已知除直角外的 2 个元素；（ ）

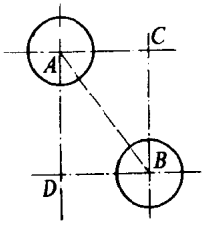
(4) $\operatorname{tg} 48°37' < \operatorname{ctg} 41°22'$；（ ）

(5) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$；（ ）

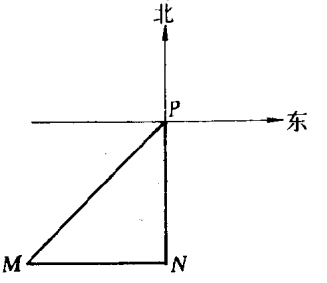
(6) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\operatorname{tg} A \cdot \sin A = \cos A$.（ ）

3. （10 分）在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 60°$，$a = 7$，解这个直角三角形.

4. （16 分）如图，某机械零件上有 A、B 两孔，它们之间的距离 $AB = 75.0$mm，$\angle DAB = 36°52'$，求两孔的水平距离 AC 和垂直距离 BC（精确到 0.1mm）.



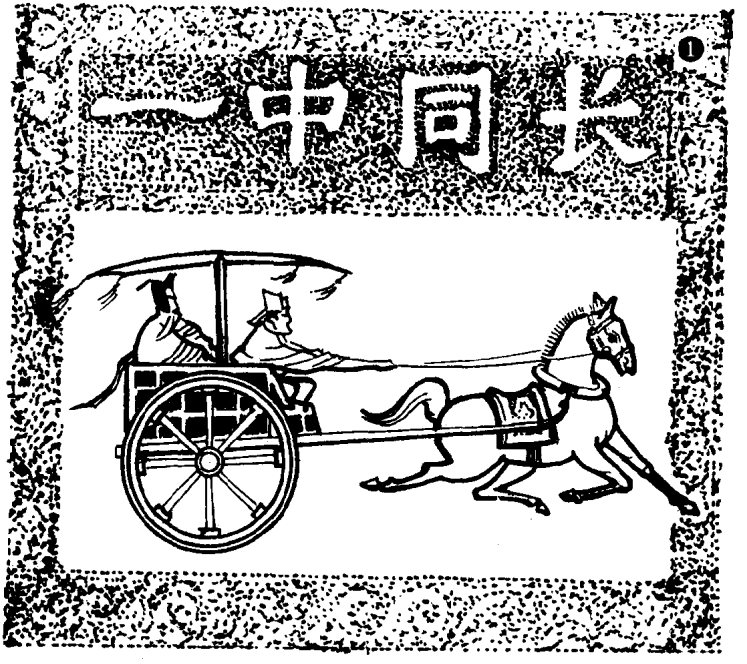
（第 4 题）



（第 5 题）

5. （20 分）一只船向东航行，上午 9 时到一座灯塔 P 的西南 68 海里的 M 处，上午 11 时到达这座灯塔的正南的 N 处，求这只船航行的速度（答案可带根号）.

第七章　圆



圆是一种常见的图形，例如上图中的车轮就是圆形的. 人们为什么把车轮做成圆形的呢？这是因为圆具有一些独特的性质. 在本章中，我们将系统地研究圆的有关性质及其应用.

---

❶ 出自战国时期《墨经》一书，原文为“圜，一中同长也”. 古代圜即圆，这句话是圆的定义，它的意思是，从中心到周界各点有相同的长度。

一　圆的有关性质

7.1　圆

1. 圆的有关性质

如图 7-1，在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫做**圆**. 固定的端点 O 叫做**圆心**，线段 OA 叫做**半径**.

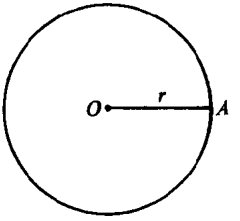


图　7-1

从上面的定义可以知道：

(1) 圆上各点到定点(圆心 O) 的距离都等于定长(半径的长 r)；

(2) 到定点的距离等于定长的点都在圆上.

也就是说，**圆是到定点的距离等于定长的点的集合**.

从画圆的过程中，还可以知道：

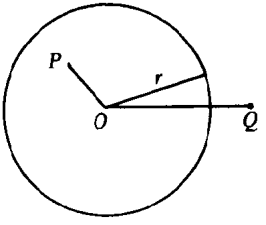


图　7-2

圆内各点(如图 7-2 中的点 P) 到圆心的距离都小于半径；到圆心的距离小于半径的点都在圆内. 也就是说，**圆的内部可以看作是到圆心的距离小于半径的点的集合**.

圆外各点(如图 7-2 中的点 Q)到圆心的距离都大于半径;到圆心的距离大于半径的点都在圆外. 也就是说,**圆的外部可以看作是到圆心的距离大于半径的点的集合.**

以点 O 为圆心的圆,记作"⊙O",读作"圆 O".

例 1 求证:矩形的四个顶点在以对角线的交点为圆心的同一个圆上.

已知:如图 7-3,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O.

求证:A、B、C、D4 个点在以点 O 为圆心的同一个圆上.

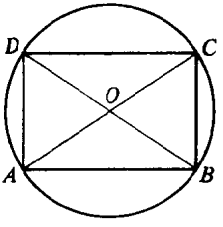


图 7-3

证明:四边形 $ABCD$ 为矩形

$$\overset{❶}{\Rightarrow}\begin{cases} OA = OC, OB = OD \\ AC = BD \end{cases}$$

$$\Rightarrow OA = OC = OB = OD$$

$\Rightarrow A$、B、C、D4 个点在以点 O 为圆心,OA 为半径的圆上.

---

❶ 符号"⇒"读作"推出","$A \Rightarrow B$"表示由条件 A 推出结论 B 的因果关系. 在某些证明过程中,使用"⇒"符号要比用"∵"、"∴"符号更简明. 今后,在表述因果关系时,可以根据情况选用符号"⇒".

练　习

1. （口答）举出一些成圆形的物体的实例.

2. 已知⊙O的半径为5cm，A为线段OP的中点，当OP满足下列条件时，分别指出点A和⊙O的位置关系：

   (1)$OP = 6$cm；　(2)$OP = 10$cm；　(3)$OP = 14$cm.

3. 设$AB = 3$厘米，画图说明具有下列性质的点的集合是怎样的图形：(1)和点A的距离等于2厘米的点的集合；(2)和点B的距离等于2厘米的点的集合；(3)和点A、B的距离都等于2厘米的点的集合；(4)和点A、B的距离都小于2厘米的点的集合.

4. 在图7-3的矩形中，如果OA、OB、OC、OD的中点分别为E、F、G、H.

   求证：E、F、G、H4个点在同一个圆上.

连结圆上任意两点的线段（如图7-4中的CD）叫做**弦**，经过圆心的弦（如图7-4中的AB）叫做**直径**. 直径等于半径的2倍.

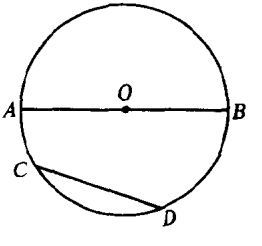


图　7-4

圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**. 弧用符号“⌒”表示. 以A、B为端点的弧记作$\overset{\frown}{AB}$，读作“圆弧AB”或“弧AB”.

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**. 大于半圆的弧(用三个字母表示，如图 7-5 中的$\overset{\frown}{BAC}$) 叫做**优弧**；小于半圆的弧(如图 7-5 中的$\overset{\frown}{BC}$) 叫做**劣弧**.

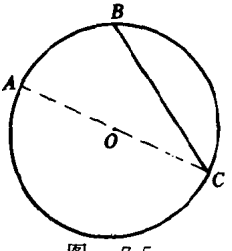


图 7-5

由弦及其所对的弧组成的图形叫做**弓形**. 如图 7-5，弦 BC 与$\overset{\frown}{BC}$ 及$\overset{\frown}{BAC}$ 组成两个不同的弓形.

圆心相同、半径不相等的两个圆叫做**同心圆**. 图 7-6 中的两个圆是以点 O 为圆心的同心圆.

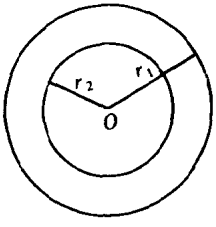


图 7-6

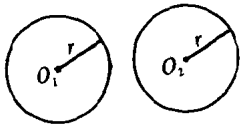


图 7-7

能够重合的两个圆叫做**等圆**. 半径相等的两个圆是等圆. 如图 7-7 中，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径都等于 r，所以它们是两个等圆. 容易看出，**同圆或等圆的半径相等**.

在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做**等弧**.

例 2 已知：如图 7-8，在 $\odot O$ 中，AB、CD 为直径. 求证：$AD \parallel BC$.

证明：连结 AC、BD.

AB、CD 为 $\odot O$ 的直径

$$\Rightarrow\begin{cases}OA = OB\\OC = OD\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 四边形 $ADBC$ 为平行四边形 $\Rightarrow AD \parallel BC$.

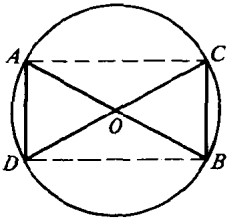


图 7-8

练　习

1. 判断题：

(1) 直径是弦；（　　）

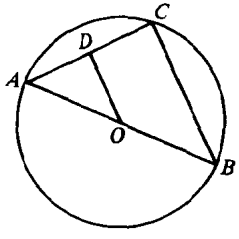
(2) 弦是直径；（　　）

(3) 半圆是弧，但弧不一定是半圆；（　　）

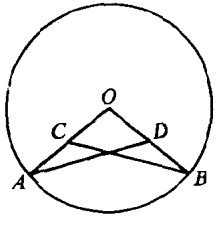
(4) 半径相等的两个半圆是等弧；（　　）

(5) 长度相等的两条弧是等弧.（　　）

2. 如图，已知 AB 为 $\odot O$ 的直径，AC 为弦，$OD \parallel BC$，交 AC 于 D，$BC = 6\text{cm}$，求 OD 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，OA、OB 为 $\odot O$ 的半径，C、D 分别为 OA、OB 的中点. 求证：$AD = BC$.

*2. 点的轨迹[1]

重物沿着直线自由下落，钟摆的下端沿着圆弧往复摆动，人造地球卫星按一定轨道绕地球运行……，我们把这些运行着的物体看作一个动点，它们按照某种规律运动所经过的路线，都给我们以点的轨迹的形象.

在几何中，点的轨迹就是点按照某个条件运动形成的图形，它是由符合某种条件的所有点组成的. 例如，把长度为 r 的线段的一个端点固定，另一个端点绕这个定点旋转一周就得到一个圆. 这个圆上的每一个点到定点的距离都等于 r；同时，到定点的距离等于 r 的所有点都在这个圆上. 这个圆就叫做到定点的距离等于定长 r 的点的轨迹.

我们把符合某一条件的所有的点所组成的图形，叫做符合这个条件的**点的轨迹**. 这里含有两层意思：(1) 图形是由符合条件的那些点组成的，就是说，图形上的任何一点都符合条件；(2) 图形包含了符合条件的所有的点，就是说，符合条件的任何一点都在图形上.

下面，我们讨论一些常见的平面内的点的轨迹.

从上面对圆的讨论可以得出：

到定点的距离等于定长的点的轨迹，是以定点为圆心，定长为半径的圆.

---

[1] 标有 * 号的内容为选学内容，不属于毕业考试的命题范围，但作为升学考试的内容.

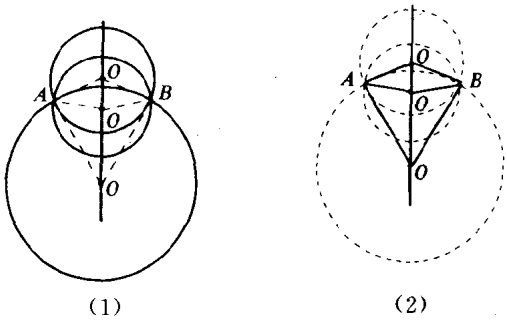
在第二册里我们学过，线段垂直平分线上的每一点，和线段两个端点的距离相等；反过来，和线段两个端点的距离相等的点，都在这条线段的垂直平分线上.所以有下面轨迹：

和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹，是这条线段的垂直平分线.

由角平分线性质定理和它的逆定理，同样可以得到另一个轨迹：

到已知角两边的距离相等的点的轨迹，是这个角的平分线.

例3 ⊙O过两个已知点A、B.圆心O的轨迹是什么?画出它的图形.



(1)　　(2)

图　7-9

分析：如图7-9，如果以点O为圆心的圆经过点A、B，那么$OA = OB$(图(1))；反过来，如果一个点O到A、B两点距离相等，即$OA = OB$，那么以O为圆心，OA为半径的圆一定经过A、B两点(图(2)).

这就是说，过点 A、B 的圆的圆心的轨迹，就是到 A、B 两点距离相等的点的轨迹，即和线段 AB 两个端点距离相等的点的轨迹.

答：经过 A、B 两点的圆的圆心 O 的轨迹是线段 AB 的垂直平分线（如图 7-10）.

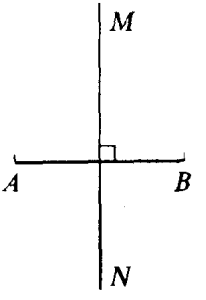


图 7-10

例 4 画图说明，到直线 l 的距离等于定长 d 的点的轨迹.

答：如图 7-11，已知直线 l 和定长 d. 任作一直线 $m \perp l$，垂足为 A，在 m 上取 $AP = d$，过 P 作 $l' \parallel l$. 用同样方法还可以在直线 l 的另一侧作 $l'' \parallel l$.

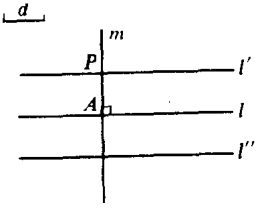


图 7－11

由“夹在两条平行线间的平行线段相等”可以知道，l' 或 l'' 上任意一点，到直线 l 的距离都等于 d，反过来也可以证明，到直线 l 的距离等于 d 的点都在直线 l' 或 l'' 上. 由此得到：

到直线 l 的距离等于定长 d 的点的轨迹，是平行于这条直线，并且到这条直线的距离等于定长的两条直线.

与例 3 类似地，可以得到：

到两条平行线距离相等的点的轨迹，是和这两条平行线平行且距离相等的一条直线(如图 7-12).

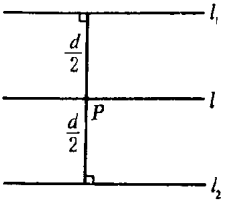


图 7-12

练　习

1. 画图说明满足下面条件的点的轨迹：

   (1) 到定点 A 的距离等于 3 cm 的点的轨迹；

   (2) 到 $\angle AOB$ 的两边距离相等的点的轨迹；

   (3) 到直线 l 的距离等于 2cm 的点的轨迹；

   (4) 已知直线 $AB \parallel CD$，到 AB、CD 距离相等的点的轨迹.

2. 已知线段 $PQ = a$. 画出和点 P 的距离等于 a 的点的轨迹；画出和点 Q 的距离等于 a 的点的轨迹. 在图上标出和点 P、Q 的距离都等于 a 的点.

3. 已知线段 $AB = 4$cm. 画出到点 A 的距离等于 3cm 的点的轨迹，再画出到点 B 的距离等于 2cm 的点的轨迹. 指出到点 A 的距离等于 3cm、到点 B 的距离等于 2cm 的点，这样的点有几个？

7.2 过三点的圆

1. 过三点的圆

我们知道，经过一个点 A 作圆很容易，只要以点 A 以外的任意一点为圆心，以这一点与点 A 的距离为半径就可以作出. 这样的圆有无数多个(图 7-13). 如果要作经过两个点 A、B 的圆，那么就要以与点 A、B 距离相等的点为圆心. 因此，以线段 AB 的垂直平分线上任意一点为圆心，以这一点与点 A 或点 B 的距离为半径就可以作出. 这样的圆也有无数多个(图 7-14).

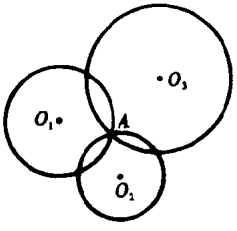


图 7-13

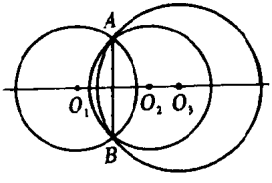


图 7-14

现在来讨论，经过三个已知点的圆.

例 1 作圆，使它经过不在同一直线上的三个已知点.

已知：不在同一直线上的三点 A、B、C(图 7-15).

求作：$\odot O$，使它经过点 A、B、C.

分析：作圆的关键是确定圆心.

因为所求的圆要经过 A、B、C 三点，所以圆心到这三点的距离相等. 因此，这个点既要在线段 AB 的垂直平分线上，又要在线段 BC 的垂直平分线上. 显然这两条垂直平分线的交点到这三点距离相等.

作法：1. 连结 AB，作线段 AB 的垂直平分线 DE.

2. 连结 BC，作线段 BC 的垂直平分线 FG，交 DE 于点 O.

3. 以 O 为圆心，OB 为半径作圆.

$\odot O$ 就是所求作的圆.

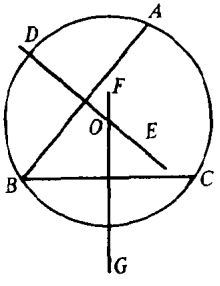


图 7-15

由作法可知，线段 AB、BC 的垂直平分线有一个且只有一个交点，所以经过不在同一直线上的三点 A、B、C 可以作一个且只可以作一个圆. 这就得到：

定理　不在同一直线上的三个点确定一个圆.

要注意，过同一条直线上的三点不能作圆.

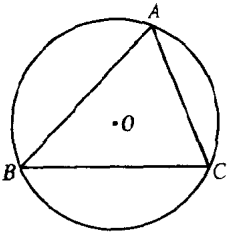
由定理可知，经过三角形三个顶点可以作一个圆. 经过三角形各顶点的圆叫做**三角形的外接圆**，外接圆的圆心叫做**三角形的外心**；这个三角形叫做这个**圆的内接三角形**.

练　习

1. 按图填空：

(1)$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的____三角形；

(2)$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的____圆.



（第 1 题）

2. 判断题：

(1) 经过三个点一定可以作圆；（　　）

(2) 任意一个三角形一定有一个外接圆，并且只有一个外接圆；（　　）

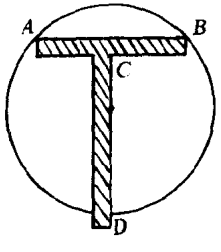
(3) 任意一个圆一定有一个内接三角形，并且只有一个内接三角形；（　　）

(4) 三角形的外心到三角形各顶点的距离都相等.（　　）

3. 如图，CD 所在的直线垂直平分线段 AB. 怎样使用这样的工具找到圆形工件的圆心？

4. 画边长分别为 2cm、2.5cm、3cm 的三角形，再画出这个三角形的外接圆，并量出这个圆的直径(精确到 0.1cm).

5. 经过 4 个(或 4 个以上的)点是不是一定能作圆？



（第 3 题）

*2. 反证法

前面我们讲过，过同一条直线上的三点不能作圆，这是为什么？下面我们来证明这个结论.

已知：如图 7-16，设点 A、B、C 在同一条直线 l 上.

求证：过 A、B、C 三点不能作圆.

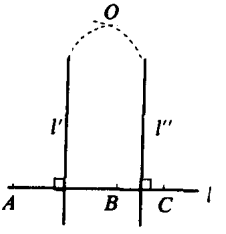


图 7-16

证明：假定过 A、B、C 三点可以作圆，设这个圆的圆心为 O.

由点的轨迹可知，点 O 在线段 AB 的垂直平分线 l' 上，并且在线段 BC 的垂直平分线 l'' 上，即点 O 为 l' 与 l'' 的交点，这与“过一点只有一条直线与已知直线垂直”相矛盾.

所以，过同一条直线上的三点不能作圆.

这个证明与我们以前学过的证明不同，它不是直接从题设推出结论，而是从命题结论的反面出发，引出矛盾，从而证明命题成立，这样的证明方法叫做**反证法**. 用反证法证明命题一般有下面三个步骤：

(1) 假设命题的结论不成立；

(2) 从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

(3) 由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

例 2 用反证法证明：一个三角形中不能有两个角是直角.

已知：$\triangle ABC$.

求证：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中不能有两个角是直角.

分析：按反证法证明命题的步骤，首先要假定结论“$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中不能有两个角是直角”不成立，即它的反面“$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中有两个角是直角”成立，然后，从这个假定出发推下去，找出矛盾.

证明：假设 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中有两个角是直角，不妨设 $\angle A = \angle B = 90°$，则

$$\angle A + \angle B + \angle C = 90° + 90° + \angle C > 180°.$$

这与三角形内角和定理矛盾，$\angle A = \angle B = 90°$ 不成立.

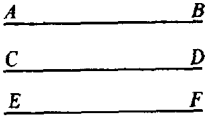
所以一个三角形中不能有两个角是直角.

练　习

用反证法证明下面各题：

(1) 已知：如图，$AB \parallel CD$，$AB \parallel EF$.

求证：$CD \parallel EF$.



(第(1)题)

(2) 求证：在一个三角形中，不能有两个角是钝角.

7.3 垂直于弦的直径

把一张圆形的纸片沿着任意一条直径对折，直径两侧的两个半圆能够互相重合. 这说明**圆是轴对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴**. 利用这个性质我们可以证明下面的定理：

垂径定理　垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.

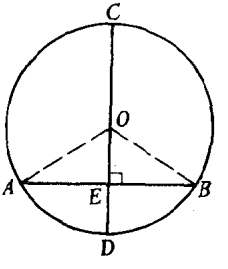


图　7-17

已知：在⊙O中，CD是直径，AB是弦，$CD \perp AB$，垂足为E(图 7-17).

求证：$AE = BE$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

证明：连结OA、OB，则$OA = OB$. 因为垂直于弦AB的直径CD所在的直线既是等腰三角形OAB的对称轴，又是⊙O的对称轴，所以，当把圆沿着直径CD折叠时，CD两侧的两个半圆重合，A点和B点重合，AE和BE重合，$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{AD}$分别和$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{BD}$重合. 因此$AE = BE$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

例 1　如图 7-18，已知在⊙O中，弦AB的长为8cm，圆心O到AB的距离为3cm，求⊙O的半径.

解：连结 OA. 过 O 作 $OE \perp AB$，垂足为 E，则 $OE = 3\text{cm}$，$AE = BE$.

$\because$ $AB = 8\text{cm}$，

$\therefore$ $AE = 4\text{cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，有

$$OA = \sqrt{OE^2 + AE^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm}).$$

$\therefore$ $\odot O$ 的半径为 5cm.

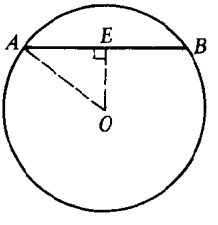


图 7-18

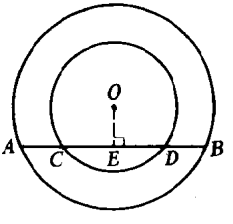


图 7-19

例 2 已知：如图 7-19，在以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于 C、D 两点.

求证：$AC = BD$.

证明：过 O 作 $OE \perp AB$，垂足为 E，则

$$AE = BE, CE = DE.$$

$\therefore$ $AE - CE = BE - DE$.

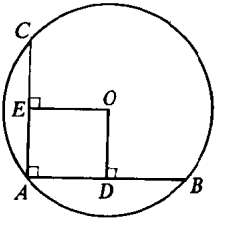
即 $AC = BD$.

注意　在圆中，解有关弦的问题时，常常需要作“垂直于弦 的直径”作为辅助线，实际上，往往只须从圆心作一条与弦垂直的线段，如图 7-18、图 7-19 中，只要作出线段 OE 即可.

练　习

1. 在半径为 50mm 的 $\odot O$ 中，有长 50mm 的弦 AB. 计算：
   (1) 点 O 与 AB 的距离；
   (2) $\angle AOB$ 的度数.

2. 已知：如图，在 $\odot O$ 中，AB、AC 为互相垂直的两条相等的弦，$OD \perp AB$，$OE \perp AC$，D、E 为垂足. 求证：$ADOE$ 为正方形.



（第 2 题）

垂径定理有下面的推论：

推论 1　(1) 平分弦(不是直径) 的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；

(2) 弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；

(3) 平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

推论 2　圆的两条平行弦所夹的弧相等.

如图 7-20 中，$AB \parallel CD$，则$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

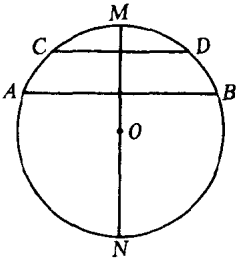


图 7-20

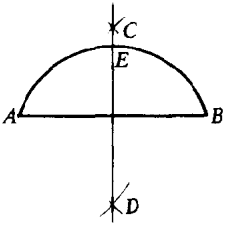


图 7-21

例 3 平分已知$\overset{\frown}{AB}$.

已知：$\overset{\frown}{AB}$(图 7-21).

求作：$\overset{\frown}{AB}$ 的中点.

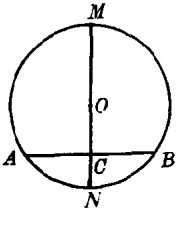
作法：1. 连结 AB.

2. 作 AB 的垂直平分线 CD，交$\overset{\frown}{AB}$于点 E. 点 E 就是所求$\overset{\frown}{AB}$的中点.

练　习

1. “平分弦的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧”这句话对不对？为什么？

2. 按图填空：在 $\odot O$ 中，



(第 2 题)

(1) 若 $MN \perp AB$，MN 为直径，

则____，____，____；

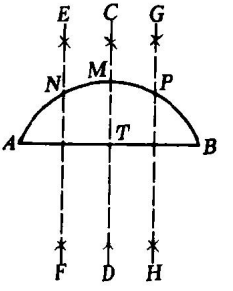
(2) 若 $AC = BC$，MN 为直径，AB 不是直径，则____，____，____；

(3) 若 $MN \perp AB, AC = BC$，则

_____，_____，_____；

(4) 若 $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}, MN$ 为直径，则

_____，_____，_____.



（第 3 题）

3. 有的同学用下面的方法 4 等分 $\overset{\frown}{AB}$：

(1) 连结 AB（如图）.

(2) 作 AB 的垂直平分线 CD 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 M，交 AB 于点 T.

(3) 分别作 AT、TB 的垂直平分线 EF、GH，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 N、P. 则 N、M、P 三点把 $\overset{\frown}{AB}$ 4 等分. 这位同学的作法对吗？为什么？

例 4 1300 多年前，我国隋代建造的赵州石拱桥（图 7-22）的桥拱是圆弧形，它的跨度（弧所对的弦的长）为 37.4 米，拱高（弧的中点到弦的距离，也叫弓形高）为 7.2 米，求桥拱的半径（精确到 0.1 米）.

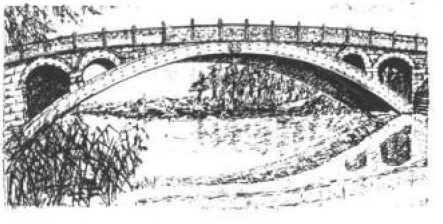


图 7-22

解：如图 7-23，用 $\overset{\frown}{AB}$ 表示桥拱，$\overset{\frown}{AB}$ 的圆心为 O，半径为 R 米.

经过圆心 O 作弦 AB 的垂线 OD，D 为垂足，与 $\overset{\frown}{AB}$ 相交于点 C. 根据垂径定理，D 是 AB 的中点，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，CD 就是拱高. 由题设

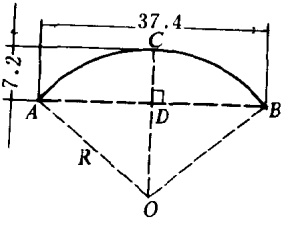


图 7-23

$$AB = 37.4, CD = 7.2,$$

$$AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 37.4 = 18.7,$$

$$OD = OC - DC = R - 7.2.$$

在 Rt$\triangle OAD$ 中，由勾股定理，得

$$OA^2 = AD^2 + OD^2,$$

即

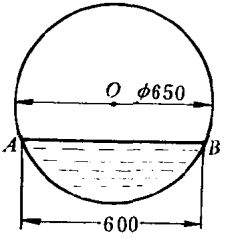
$$R^2 = 18.7^2 + (R - 7.2)^2.$$

解这个方程，得 $R \approx 27.9$(米).

答：赵州石拱桥的桥拱半径约为 27.9 米.

练　习

1. 在直径为 650mm 的圆柱形油槽内装入一些油后，截面如图所示. 若油面宽 $AB = 600$mm，求油的最大深度.



（第 1 题）

2. 在证明垂径定理的图 7-17 中，有哪些相等的线段？有哪些相等的角？有哪些相等的弧？

习　题 7.1

A　组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 怎样用集合的观点描述圆？什么叫做圆心？什么叫做半径？

(2) 点和圆有几种位置关系？

(3) 什么叫做弦？什么叫做直径？什么叫做弧？什么叫做优弧？什么叫做劣弧？什么叫做等弧？

(4) 什么叫做等圆？同圆或等圆的半径有什么性质？

*(5) 什么叫做点的轨迹？我们学过哪些点的轨迹？

(6) 怎样用尺规作出“过不在一条直线上的三点的圆”？

(7) 什么叫做三角形的外心？

*(8) 用反证法证明命题的一般步骤是什么？

(9) 圆是轴对称图形吗？如果是，说明它有多少条对称轴.

(10) 垂径定理及其推论的内容各是什么？

2. 用图形表示和已知点 O 的距离大于或等于 2cm，而又小于或等于 3cm 的点的集合.

3. $\odot O$ 的半径 $r = 5$ 厘米，圆心 O 到直线 l 的距离 $d = OD = 3$ 厘米. 在直线 l 上有 P、Q、R 三点，且有 $PD = 4$ 厘米，$QD > 4$ 厘米，$RD < 4$ 厘米. P、Q、R 三点对于 $\odot O$ 的位置各是怎样的？

4. 求证：菱形各边的中点在同一个圆上.

5. 求证：直径是圆中最长的弦.

*6. 说出下列点的轨迹，画出它的图形：

(1) 已知线段 MN，到点 M 的距离等于 $\frac{1}{2}MN$ 的点的轨迹；

(2) $OA \perp OB$，垂足为 O，到 OA、OB 距离相等的点的轨迹；

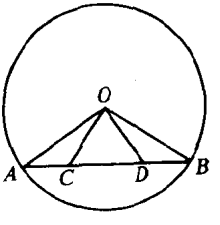
(3) 底边为已知线段 BC 的等腰三角形 ABC 的顶点 A 的轨迹；

(4) 与已知 $\triangle ABC$ 有一条公共边 AB，并且面积相等的 $\triangle PAB$ 的顶点 P 的轨迹.

7. 已知：如图，在 $\odot O$ 中，AB 为弦，C、D 两点在 AB 上，且 $AC = BD$. 求证：$\triangle OCD$ 为等腰三角形.

8. 已知线段 AB 的长为 4cm，以 3cm 为半径画圆，使它经过点 A 和 B.

9. 分别画一个锐角三角形、一个直角三角形和一个钝角三角形的外接圆，并说明它们的外心与三角形的位置关系.



(第 7 题)

*10. 用反证法证明下列命题：

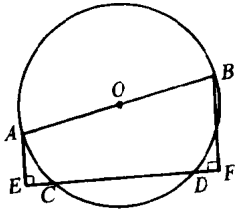
(1) 垂直于同一条直线的两条直线平行；

(2) 一条直线与两条平行线中的一条相交，必定与另一条相交；

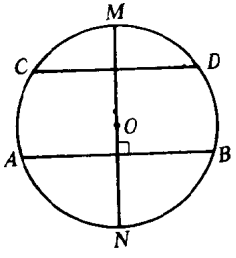
(3) 两条直线的公共点，最多只有一个.

11. 经过已知 $\odot O$ 内的已知点 A 作弦，使它以点 A 为中点.

12. 已知：如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，CD 是弦，$AE \perp CD$，垂足为 E，$BF \perp CD$，垂足为 F. 求证：$EC = DF$.



(第 12 题)

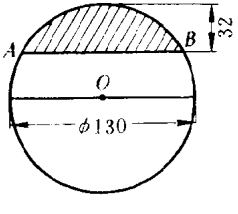


(第 14 题)

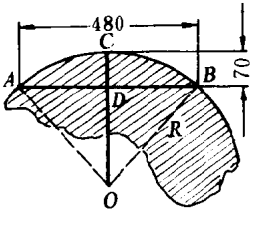
13. 已知 $\odot O$ 的半径为 2cm，弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ cm，求这弦中点到这弦所对的劣弧的中点的距离.

14. 已知：如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条平行弦，MN 是 AB 的垂直平分线. 求证：MN 垂直平分 CD.

15. 在直径为 130mm 的圆铁片上切去一块高为 32mm 的弓形铁片(如图). 求弓形的弦 AB 的长.



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 破残的轮片上，弓形的弦 AB 长 480mm，高 CD 为 70mm(如图). 求原轮片的直径.

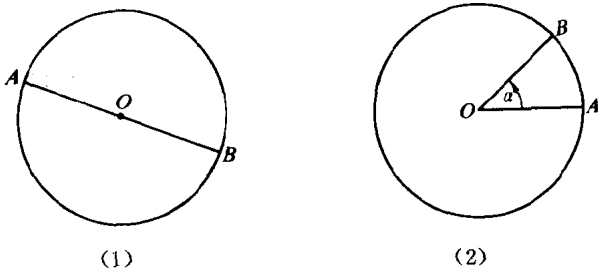
B 组

1. 作一个圆,使它经过已知点 A 和 B,并且圆心在已知直线 l 上.
   (1) 当直线 l 和 AB 斜交时,可作出几个?
   (2) 当直线 l 和 AB 垂直但不经过 AB 的中点时,可作出几个?
   (3) 当直线 l 是线段 AB 的垂直平分线时,怎样呢?
2. $\odot O$ 的半径为 5 厘米,弦 $AB \parallel CD$,$AB = 6$ 厘米,$CD = 8$ 厘米. 求 AB 和 CD 的距离.
3. 已知在 $\odot O$ 中,弦 AB 的长是半径 OA 的 $\sqrt{3}$ 倍,C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点. 求证四边形 $OACB$ 为菱形.
4. 已知等腰三角形 ABC 的底边 BC 的长为 10cm,顶角为 120°,求它的外接圆的直径.

*5. 用反证法证明:圆的两条不是直径的相交弦不能互相平分.

7.4 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

如图 7-24(1)，在⊙O 上任取一点 A，作直径 AB，则 $OA=OB$. 就是说，A、B 关于点 O 对称. 因此，**圆是以圆心为对称中心的中心对称图形.**



(1)　　(2)

图 7-24

圆不仅是中心对称图形，实际上，圆绕圆心旋转任意一个角度 α，都能够与原来的图形重合(图7-24(2))．利用这个性质，我们还可以推出圆的其他一些性质.

顶点在圆心的角叫做**圆心角**. 从圆心到弦的距离叫做**弦心距**. 现在用上面的性质来研究在同一个圆中，圆心角、圆心角所对的弦、弧及弦心距之间的关系.

如图 7-25，在⊙O 中，当圆心角 $\angle AOB=\angle A'OB'$ 时，它们所对的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{A'B'}$、弦 AB 和 $A'B'$、弦心距 OM 和 OM' 是否也相等呢？

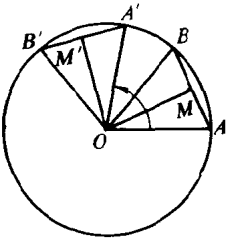


图 7-25

我们把 $\angle AOB$ 连同 $\overset{\frown}{AB}$ 绕圆心 O 旋转，使射线 OA 与 OA' 重合.

$\because$ $\angle AOB = \angle A'OB'$,

$\therefore$ 射线 OB 与 OB' 重合.

又 $\because$ $OA = OA'$, $OB = OB'$,

$\therefore$ 点 A 与点 A' 重合,点 B 与点 B' 重合.

这样,$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合,AB 与 $A'B'$ 重合,从点 O 到 AB 的垂线段 OM 和从点 O 到 $A'B'$ 的垂线段 OM' 也重合. 即

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}, AB = A'B', OM = OM'.$$

上面的结论,在两个等圆中也成立. 于是有下面的定理:

定理　在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等,所对的弦的弦心距相等.

由上面的定理,可以得到下面推论:

推论　在同圆或等圆中,如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等,那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

例 1　如图 7-26,点 O 是 $\angle EPF$ 的平分线上的一点,以 O 为圆心的圆和角的两边分别交于点 A、B 和 C、D.

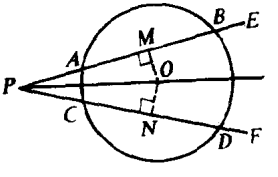


图　7-26

求证：$AB = CD$.

证明：作 $OM \perp AB, ON \perp CD$，M、N 为垂足.

$$\left.\begin{array}{l} \angle MPO = \angle NPO \\ OM \perp AB \\ ON \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow OM = ON \Rightarrow AB = CD.$$

练　习

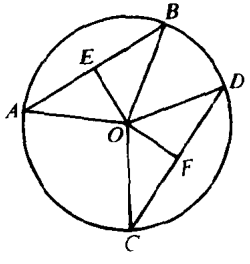
1. 已知：如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条弦，OE、OF 为 AB、CD 的弦心距，根据本节定理及推论填空：

(1) 如果 $AB = CD$，那么____，____，____；

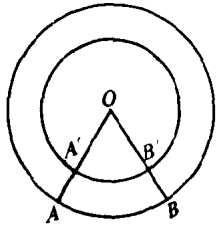
(2) 如果 $OE = OF$，那么____，____，____；

(3) 如果 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，那么____，____，____；

(4) 如果 $\angle AOB = \angle COD$，那么____，____，____.



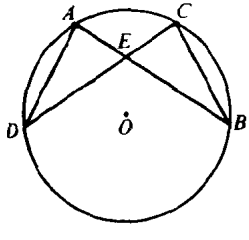
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 下面的说法正确吗？为什么？

如图，因为 $\angle AOB = \angle A'OB'$，根据圆心角、弧、弦、弦心距关系定理可知 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.



（第 3 题）

3. 已知：如图，$AD = BC$. 求证：$AB = CD$.

我们知道，把顶点在圆心的周角等分成 360 份时，每一份的圆心角是 1° 的角. 因为同圆中相等的圆心角所对的弧相等，所以整个圆也被等分成 360 份. 我们把每一份这样的弧叫做 **1° 的弧**.

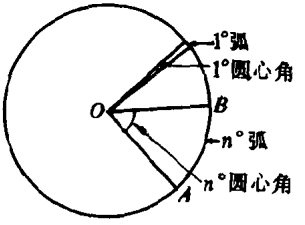


图 7-27

由上述定义可知，1° 的圆心角对着 1° 的弧，1° 的弧对着 1° 的圆心角. 一般地，$n°$ 的圆心角对着 $n°$ 的弧，$n°$ 的弧对着 $n°$ 的圆心角(图 7-27). 也就是说，圆心角的度数和它所对的弧的度数相等.

例 2 如图 7-28，在 $\odot O$ 中，弦 AB 所对的劣弧为圆的 $\frac{1}{3}$，圆的半径为 2cm，求 AB 的长.

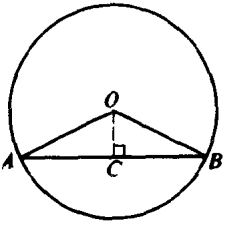


图 7-28

解：由题意可知 $\overset{\frown}{AB}$ 为 120°，

$\therefore \quad \angle AOB = 120°.$

作 $OC \perp AB$，垂足为 C，则 $\angle AOC = 60°$，$AC = BC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，

$$AC = OA\sin 60° = 2 \times \sin 60°$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$\therefore \quad AB = 2AC = 2\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}).$

例 3　如图 7-29，已知 AB 和 CD 为 $\odot O$ 的两条直径，弦 $CE \parallel AB$，$\overset{\frown}{EC}$ 的度数为 40°，求 $\angle BOD$ 的度数.

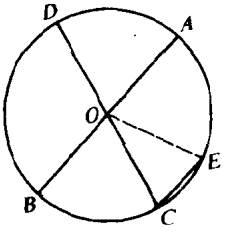


图　7-29

解：连结 OE.

$\overset{\frown}{EC}$ 的度数为 40°

$\Rightarrow \angle COE = 40°$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \angle C = 70° \\ AB \parallel EC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BOC = 70°$

$\Rightarrow \angle BOD = 110°$.

练　习

1. 判断题：在两个圆中，分别有 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$，若 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数和 $\overset{\frown}{CD}$ 的度数相等，则有

(1) $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 相等；　（　）

(2) $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角和 $\overset{\frown}{CD}$ 所对的圆心角相等.　（　）

2. 圆的一条弦把圆分为度数的比为 1∶5 的两条弧，如果圆的半径为 R，求弦心距和弦长.

想一想

已知 AB 和 CD 是 $\odot O$ 的两条弦，OM 和 ON 分别是 AB 和 CD 的弦心距，如果 $AB > CD$，那么 OM 和 ON 有什么关系？为什么？

7.5 圆周角

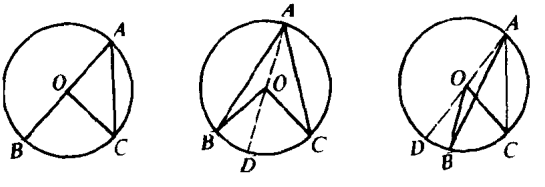
顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做**圆周角**.

圆心角和圆周角是不同的角，并且有不同的性质，但是只要它们同对着一条弧，彼此之间就有着一定的关系. 下面的定理说明了这种关系.

定理　一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

已知：$\odot O$ 中，$\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角是 $\angle BAC$，圆心角是 $\angle BOC$(图 7-30).

求证：$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$.



(1)　　(2)　　(3)

图　7-30

分析：如果圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一边 AB 上(图 7-30(1))，只要利用三角形内角和定理的推论和等腰三角形的性质即可证明. 如果圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部或外部(图 7-30(2)、(3))，那么只要作出直径 AD，将这个角转化为上述情况的两个角的和或差即可.

证明：分三种情况讨论.

(1) 图 7-30(1) 中，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一条边上.

$$\left.\begin{aligned} OA = OC &\Rightarrow \angle C = \angle BAC \\ \angle BOC &= \angle BAC + \angle C \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

(2) 图 7-30(2) 中，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部. 作直径 AD. 利用(1) 的结果，有

$$\left.\begin{aligned} \angle BAD &= \frac{1}{2}\angle BOD \\ \angle DAC &= \frac{1}{2}\angle DOC \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOC)$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

(3) 图 7-30(3) 中，圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部. 作直径 AD. 利用(1) 的结果，有

$$\left.\begin{aligned} \angle DAB &= \frac{1}{2}\angle DOB \\ \angle DAC &= \frac{1}{2}\angle DOC \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \angle DAC - \angle DAB = \frac{1}{2}(\angle DOC - \angle DOB)$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC.$$

例 1　如图 7-31，OA、OB、OC 都是 $\odot O$ 的半径，$\angle AOB = 2\angle BOC$. 求证：$\angle ACB = 2\angle BAC$.

证明：$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$

$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

$\angle AOB = 2\angle BOC$

$\Rightarrow \angle ACB = 2\angle BAC$.

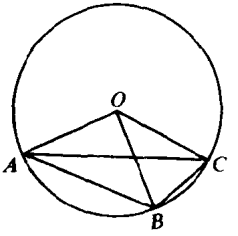
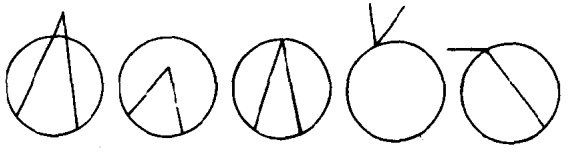


图　7-31

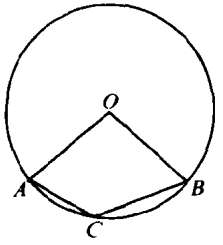
练　习

1. 判别下列各图形中的角是不是圆周角，并说明理由.



（第 1 题）

2. 如图，已知圆心角 $\angle AOB$ 的度数为 100°，求圆周角 $\angle ACB$ 的度数.



（第 2 题）

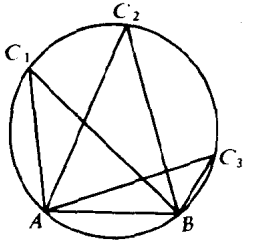


图　7-32

由定理可推得下面一些推论：

推论 1　**同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等**（图 7-32）.

推论 2　半圆(或直径)所对的圆周角是直角;90°的圆周角所对的弦是直径(图 7-33).

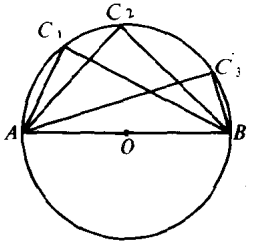


图　7-33

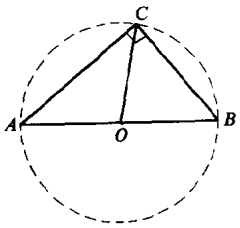


图　7-34

如图 7-34,在 $\triangle ABC$ 中,如果中线 $CO=\frac{1}{2}AB$,以 AB 为直径作 $\odot O$,则点 C 在 $\odot O$ 上. 由推论 2 可知,$\angle ACB=90°$. 由此得到:

推论 3　如果三角形一边上的中线等于这边的一半,那么这个三角形是直角三角形.

例 2　如图 7-35,AD 是 $\triangle ABC$ 的高,AE 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径.

求证:$AB\cdot AC=AE\cdot AD$.

证明:连结 BE.

$\because\ \angle ADC=\angle ABE=90°$,$\angle C=\angle E$,

$\therefore\ \triangle ADC\backsim\triangle ABE$.

$\therefore\ \dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AD}{AB}$.

$\therefore\ AB\cdot AC=AE\cdot AD$.

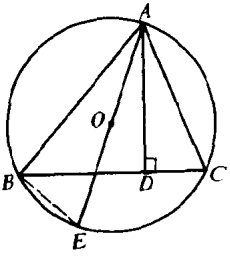
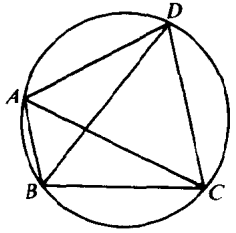


图　7-35

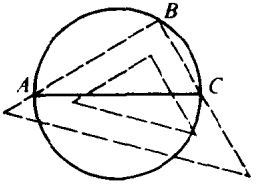
注意　在解圆的有关问题时，常常需要添加辅助线，构成直径上的圆周角，以便利用直径上的圆周角是直角的性质.

练　习

1. 如图，点 A、B、C、D 在同一个圆上，找出四边形 $ABCD$ 的对角线把 4 个内角分成的 8 个角中，哪些是相等的角.



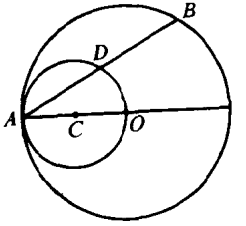
（第 1 题）



（第 2 题）

2. （口答）怎样运用三角板（或曲尺）画出圆形工件表面上的直径、定出圆心？说明理由.

3. OA 是 $\odot O$ 的半径，以 OA 为直径的 $\odot C$ 与 $\odot O$ 的弦 AB 相交于点 D. 求证：D 是 AB 的中点.



（第 3 题）

例 3　如图 7-36，已知在 $\odot O$ 中，直径 AB 为 10cm，弦 AC 为 6cm，$\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于 D，求 BC、AD 和 BD 的长.

解：∵ AB 为直径，

∴ $\angle ACB = \angle ADB = 90°$.

在 Rt$\triangle ACB$ 中，

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

$= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

∵ CD 平分 $\angle ACB$，

∴ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

∴ $AD = BD$.

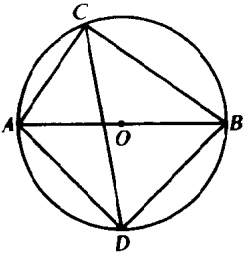


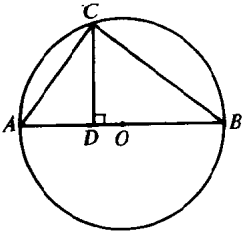
图 7-36

在等腰直角三角形 ADB 中，

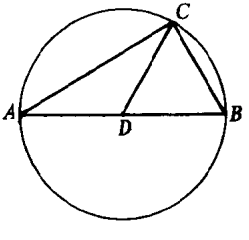
$$AD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10 = 5\sqrt{2}\ (\text{cm}).$$

练　习

1. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AC = 3\text{cm}$，$BC = 4\text{cm}$，$CD \perp AB$，垂足为 D. 求 AD、BD 和 CD 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$AB = 2CD$，$\angle B = 60°$. 求证：$\triangle ABC$ 外接圆的半径等于 CB.

7.6 圆的内接四边形

如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做**圆内接多边形**，这个圆叫做这个**多边形的外接圆**. 如图 7-37 中的四边形 $ABCD$ 叫做 $\odot O$ 的内接四边形，而 $\odot O$ 叫做四边形 $ABCD$ 的外接圆. 因为圆内接四边形的每一个角都是圆周角，所以我们可以利用圆周角定理，来研究圆内接四边形的角之间的关系.

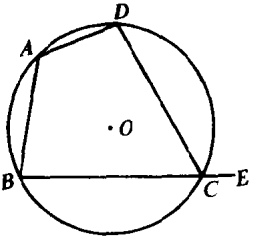


图 7-37

如图 7-37，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形.

$\because$ $\overset{\frown}{BAD}$ 和 $\overset{\frown}{BCD}$ 所对的圆心角的和是周角，

$\therefore$ $\angle A + \angle BCD = 180°$.

同理 $\angle B + \angle D = 180°$.

如果延长 BC 到 E，那么 $\angle BCD + \angle DCE = 180°$，所以

$\angle A = \angle DCE$.

$\angle A$ 是与 $\angle DCE$ 相邻的内角 $\angle DCB$ 的对角(简称为 $\angle DCE$ 的内对角)，于是我们得到圆的内接四边形的性质定理.

定理 圆的内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角.

例　如图 7-38，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 都经过 A、B 两点，经过点 A 的直线 CD 与 $\odot O_1$ 交于点 C，与 $\odot O_2$ 交于点 D. 经过点 B 的直线 EF 与 $\odot O_1$ 交于点 E，与 $\odot O_2$ 交于点 F.

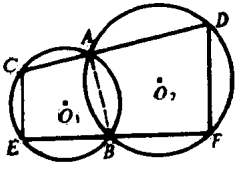


图　7-38

求证：$CE \parallel DF$.

证明：连结 AB.

∵　$ABEC$ 是 $\odot O_1$ 的内接四边形，

∴　$\angle BAD = \angle E$.

又 ∵　$ADFB$ 是 $\odot O_2$ 的内接四边形，

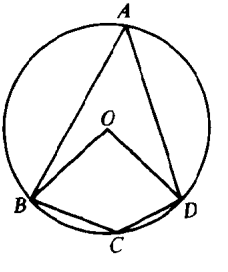
∴　$\angle BAD + \angle F = 180°$.

∴　$\angle E + \angle F = 180°$.

∴　$CE \parallel DF$.

练　习

1. 如图，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，已知 $\angle BOD$ 为 100°，求 $\angle BAD$ 及 $\angle BCD$ 的度数.



（第 1 题）

2. 求证：圆内接平行四边形是矩形.

习 题 7.2

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

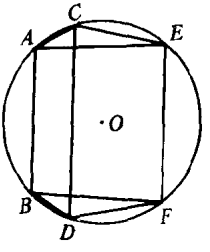
   (1) 什么叫做圆心角？什么叫做弦心距？在同圆或等圆中，圆心角、弧、弦和弦心距之间有什么关系？

   (2) 什么叫做 1° 的弧？圆心角的度数和它所对的弧的度数之间有什么关系？

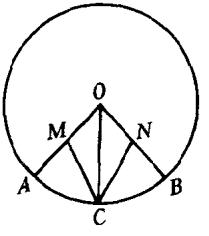
   (3) 什么叫做圆周角？圆周角定理的内容是什么？圆周角定理是怎样证明的？圆周角定理有哪些主要的推论？

   (4) 什么叫做圆内接四边形？圆内接四边形有什么性质？

2. 已知：如图，AB、CD、EF 是 $\odot O$ 的三条弦，且 $AB \parallel CD \parallel EF$. 求证：$\triangle ACE \cong \triangle BDF$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，OA、OB、OC 是 $\odot O$ 的三条半径，$\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 相等，M、N 分别是 OA、OB 的中点.

   求证：$MC = NC$.

4. 已知：弦 AB 和 CD 相交于圆内的点 P，并且和经过点 P 的直径成等角.

求证：$AB = CD$.

5. 六边形 $ABCDEF$ 的各顶点在同一个圆上，且各边都相等，求这个六边形各边所对的圆心角的度数.

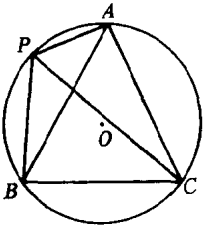
6. 一条弦分圆为 1∶4 两部分，求这弦所对的圆周角的度数.

7. 已知 OA、OB 为 $\odot O$ 的半径，$\angle AOB = 54°18'$，点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上.

求 $\angle ACB$ 的大小.

8. 已知：如图，$\angle APC = \angle CPB = 60°$.

求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.



（第 8 题）

9. 已知：圆上一点 P 到直径 AB 的垂线段的垂足为 D.

求证：$\triangle BPD \backsim \triangle PAD$.

10. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的平分线与边 BC 和外接圆分别相交于点 D 和 E.

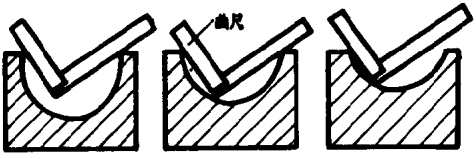
求证：$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

11. 求证：以等腰三角形的一腰为直径的圆，平分底边.

12. 已知：圆内接三角形 ABC 中，$AB = AC$，经过点 A 的弦与 BC 和 $\overset{\frown}{BC}$ 分别相交于点 D 和 E.

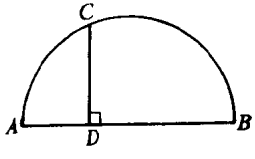
求证：$\triangle ABD \backsim \triangle AEB$.

13. 使用曲尺检验工件的凹面，成半圆形时为合格. 如图所示的三种情况中，哪种是合格的？哪种是不合格的？为什么？

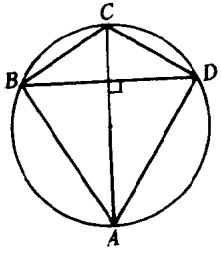


（第 13 题）

14. 已知：如图，半圆的直径 $AB = 13\text{cm}$，C 为半圆上一点，$CD \perp AB$，垂足为 D，且 $CD = 6\text{cm}$，求 AD 的长.



（第 14 题）

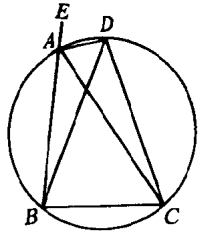


（第 15 题）

15. 如图，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 BD，并且 $AC \perp BD$，$\angle BAD = 70°18'$，求四边形其余各角.

16. 圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数的比是 2∶3∶6. 求四边形各内角的度数.

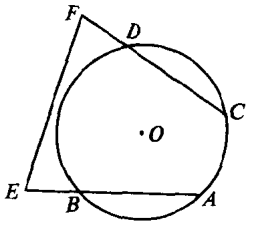
17. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle EAC$ 的平分线，AD 与三角形的外接圆交于点 D. 求证：$DB = DC$.



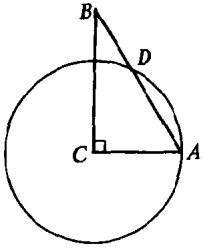
（第 17 题）

B 组

1. 已知：如图，在 $\odot O$ 中，弦 $AB = CD$，延长 AB 到 E，延长 CD 到 F，使 $BE = DF$. 求证：EF 的垂直平分线经过点 O.



（第 1 题）

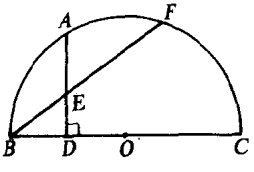


（第 2 题）

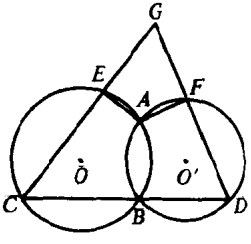
2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$\angle B = 25°$，以 C 为圆心、CA 为半径的圆交 AB 于 D. 求：$\overset{\frown}{AD}$ 的度数.

3. 如图，BC 为 $\odot O$ 的直径，$AD \perp BC$，垂足为 D，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AF}$，$BF$ 和 AD 交于 E. 求证：$AE = BE$.

4. 已知等腰三角形的腰长为 13cm，底边长为 10cm，求它的外接圆的半径.



（第 3 题）

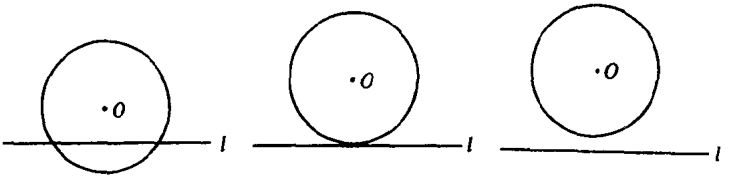


（第 5 题）

5. 如图，$\odot O$ 和 $\odot O'$ 都经过 A、B 两点，过 B 作直线交 $\odot O$ 于 C，交 $\odot O'$ 于 D，G 为圆外一点，GC 交 $\odot O$ 于 E，GD 交 $\odot O'$ 于 F. 求证：$\angle GEA + \angle GFA = 180°$.

二　直线和圆的位置关系

7.7　直线和圆的位置关系



(1)　(2)　(3)

图　7-39

观察图 7-39 中直线与圆的相对运动，可以得到直线与圆三种不同的位置关系：

(1) 直线和圆有两个公共点时，叫做直线和圆**相交**(图 7-39(1)). 这时直线叫做圆的**割线**.

(2) 直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆**相切**(图 7-39(2)). 这时直线叫做圆的**切线**，唯一的公共点叫做**切点**.

(3) 直线和圆没有公共点时，叫做直线和圆**相离**(图 7-39(3)).

根据直线与圆相交、相切、相离的定义，容易看出：

如果 $\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，那么

(1) **直线 l 和 $\odot O$ 相交** $\Longleftrightarrow d < r$;

(2) **直线 l 和 $\odot O$ 相切** $\Longleftrightarrow d = r$;

(3) **直线 l 和 $\odot O$ 相离** $\Longleftrightarrow d > r$.

符号“$\Longleftrightarrow$”读作“等价于”. 它表示从左端可以推出右端,并且从右端也可以推出左端.

根据直线与圆相切的定义,可以用直尺近似地画出已知圆的切线.

例 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,$AC = 3\mathrm{cm}$,$BC = 4\mathrm{cm}$,以 C 为圆心,r 为半径的圆与 AB 有怎样的位置关系?为什么?

(1) $r = 2\mathrm{cm}$; (2) $r = 2.4\mathrm{cm}$; (3) $r = 3\mathrm{cm}$.

解: 过 C 作 $CD \perp AB$,垂足为 D(图 7-40). 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= 5.$$

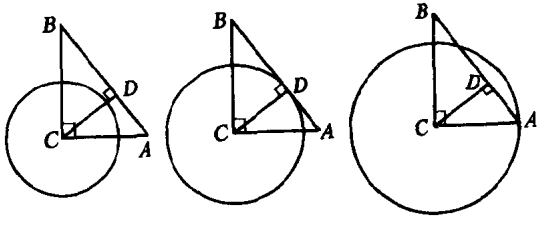
根据三角形的面积公式有

$$CD \cdot AB = AC \cdot BC,$$

$$\therefore \quad CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5}$$
$$= 2.4(\mathrm{cm}).$$

即圆心 C 到 AB 的距离 $d = 2.4\mathrm{cm}$.

(1) 当 $r = 2\mathrm{cm}$ 时,有 $d > r$,因此 $\odot C$ 和 AB 相离(图 7-40(1)).



(1)　　(2)　　(3)

图　7-40

(2) 当 $r = 2.4$cm 时，有 $d = r$，因此 $\odot C$ 和 AB 相切(图 7-40(2)).

(3) 当 $r = 3$cm 时，有 $d < r$，因此 $\odot C$ 和 AB 相交(图 7-40(3)).

练　习

1. 已知圆的直径为 13cm，如果直线和圆心的距离为

(1) 4.5cm；　(2) 6.5cm；　(3) 8cm，

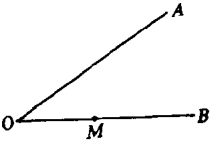
那么直线和圆有几个公共点？为什么？

2. 如图，已知 $\angle AOB = 30°$，M 为 OB 上一点，且 $OM = 5$cm，以 M 为圆心、以 r 为半径的圆与直线 OA 有怎样的位置关系？为什么？

(1) $r = 2$cm；

(2) $r = 4$cm；

(3) $r = 2.5$cm.



(第 2 题)

7.8 切线的判定和性质

如图 7-41，在 $\odot O$ 中，经过半径 OA 的外端点 A，作直线 $l \perp OA$，则圆心 O 到直线 l 的距离等于半径 r. 由上一节我们知道，这样的直线与圆一定相切. 因此有下面定理：

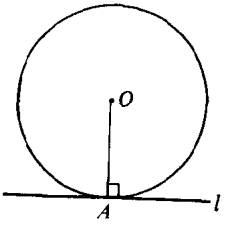


图 7-41

切线的判定定理　经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

例 1　已知：直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 C，并且 $OA = OB$，$CA = CB$（图 7-42）.

求证：直线 AB 是 $\odot O$ 的切线.

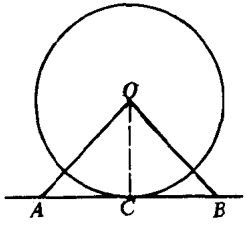


图 7-42

证明：连结 OC.

$\because$ $OA = OB, CA = CB$，

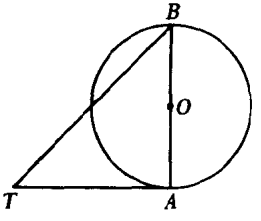
$\therefore$ OC 是等腰三角形 OAB 底边 AB 上的中线.

$\therefore$ $AB \perp OC$.

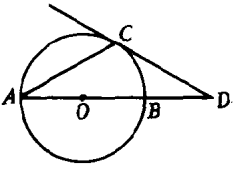
直线 AB 经过半径 OC 的外端 C，并且垂直于半径 OC，所以 AB 是 $\odot O$ 的切线.

练　习

1. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle ABT = 45°$，$AT = AB$. 求证：AT 是 $\odot O$ 的切线.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D 在 AB 的延长线上，$BD = OB$，点 C 在圆上，$\angle CAB = 30°$. 求证：DC 是 $\odot O$ 的切线.

下面我们研究圆的切线的性质.

如图 7-43，如果直线 AT 是 $\odot O$ 的切线，A 为切点，那么 AT 和半径 OA 是不是一定垂直呢？

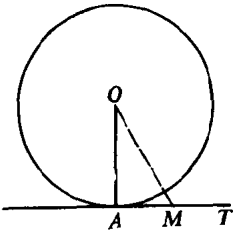


图 7-43

假设 AT 与 OA 不垂直，过 O 作 $OM \perp AT$，垂足为 M. 根据“垂线段最短”的性质，有 $OM < OA$. 这就是说圆心到直线 AT 的距离小于半径，于是 AT 就要与 $\odot O$ 相交. 这与 AT 是 $\odot O$ 的切线相矛盾.

因此，AT 与 OA 垂直.

于是有下面的定理：

切线的性质定理　圆的切线垂直于经过切点的半径.

由于过已知点只有一条直线与已知直线垂直，所以经过圆心垂直于切线的直线一定过切点；反过来，过切点垂直于切线的直线也一定经过圆心. 由此得到：

推论 1　经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

推论 2　经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

例 2　如图 7-44，AB 为 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上一点，AD 和过 C 点的切线互相垂直，垂足为 D. 求证：AC 平分 $\angle DAB$.

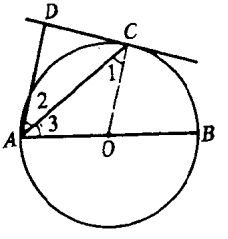


图　7-44

证明：连结 OC.

$$CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线} \Rightarrow \left.\begin{matrix} OC \perp CD \\ AD \perp CD \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow OC \parallel AD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle 2 = \angle 3.$$

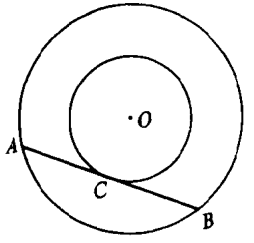
$$OC = OA \Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$$

$\therefore$　AC 平分 $\angle DAB$.

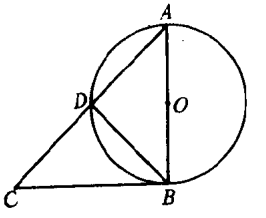
注意　在解有关圆的切线问题时，常常需要作出过切点的半径.

练　习

1. 如图的两个圆是以 O 为圆心的同心圆，大圆的弦 AB 是小圆的切线，C 为切点. 求证：C 是 AB 的中点.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在 $\odot O$ 中，AB 为直径，AD 为弦，过 B 点的切线与 AD 的延长线交于点 C，且 $AD = DC$，求 $\angle ABD$ 的度数.

3. 求证：经过直径两端点的切线互相平行.

例 3　已知：AB 是 $\odot O$ 的直径，BC 是 $\odot O$ 的切线，切点为 B，OC 平行于弦 AD（图 7-45）.

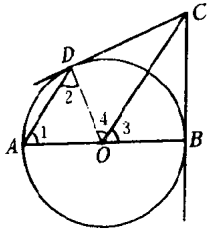


图　7-45

求证：DC 是 $\odot O$ 的切线.

证明：连结 OD.

$$OA = OD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$

$$AD \parallel OC \Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle 2 = \angle 4 \end{cases} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4.$$

$$\left.\begin{array}{l} OB = OD \\ \angle 3 = \angle 4 \\ OC = OC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle ODC$$

$$\Rightarrow \angle OBC = \angle ODC.$$

$\because$ BC 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$ $\angle OBC = 90°$.

$\therefore$ $\angle ODC = 90°$.

$\therefore$ DC 是 $\odot O$ 的切线.

例 4 如图 7-46，在以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 和 CD 相等，且 AB 与小圆相切于点 E，求证：CD 与小圆相切.

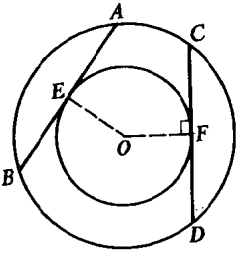


图 7-46

证明：连结 OE，过 O 作 $OF \perp CD$，垂足为 F.

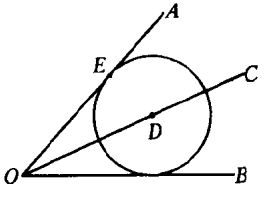
$$AB \text{ 与小圆 } O \text{ 切于点 } E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OE \perp AB \\ OF \perp CD \\ AB = CD \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow OF = OE \\ OF \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow CD \text{ 与小圆 } O \text{ 相切.}$$

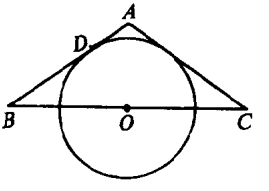
练　习

1. 已知：OC 平分 $\angle AOB$，D 是 OC 上任意一点，$\odot D$ 与 OA 相切于点 E.

求证：OB 与 $\odot D$ 相切.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，O 是底边 BC 的中点，$\odot O$ 与腰 AB 相切于点 D.

求证：AC 与 $\odot O$ 相切.

想一想

圆的切线性质定理及它的两个推论，涉及了一条直线的三条性质：(1) 过圆心；(2) 过切点；(3) 垂直于切线. 你能用一个定理把圆的切线的性质及它的两个推论概括出来吗？

读一读

为什么车轮做成圆的？

路上行驶的各种车辆，都有圆形的轮子. 从本章的章前图中我们可以看到，中国古时候就造出了装有圆形车轮的车辆. 为什么车轮要做成圆形的呢？

观察图 1，车辆在平坦的地面上行驶时，车轮 $\odot O$ 与地面上一条直线 l 是相切的，由圆的切线定义可知，在车轮向前滚动时，轮子的中心与地面的距离总是不变的，这个距离等于车轮的半径.

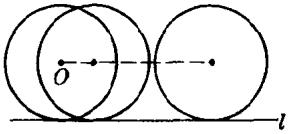


图 1

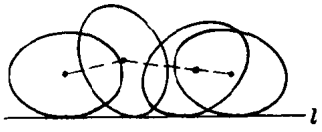


图 2

如果把车厢装在过轮子中心的车轴上，那么车辆在平坦的公路上行驶时，人坐在车厢里会感觉非常平稳. 试想一下，如果车轮不是圆的(如图 2)，坐在车上的人会是什么滋味呢？

实际上，车轮做成圆的，还有其他原因. 在初二物理中，我们知道，物体滚动时，要比滑动时的摩擦小，而圆形物体是最容易滚动的.

从圆形车轮出现到现在已有几千年了，它在人类进步中发挥了巨大作用，目前这个世界上已到处是车轮滚滚.

7.9 三角形的内切圆

从一块三角形的材料上裁下一块圆形的用料，怎样才能使圆的面积尽可能大呢？这实际是下面的问题.

例 1 作圆，使它和已知三角形的各边都相切.

已知：$\triangle ABC$（图 7-47）.

求作：和 $\triangle ABC$ 的各边都相切的圆.

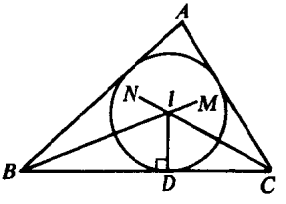


图 7-47

分析：作圆的关键是确定圆心. 因为所求的圆与 $\triangle ABC$ 的三边都相切，所以圆心到三边的距离相等. 因此，这个点既要在 $\angle B$ 的平分线上，又要在 $\angle C$ 的平分线上. 显然这两条平分线的交点到三边的距离相等.

作法：1. 作 $\angle B$、$\angle C$ 的平分线 BM 和 CN，交点为 I.

2. 过点 I 作 $ID \perp BC$，垂足为 D.

3. 以 I 为圆心，ID 为半径作 $\odot I$.

$\odot I$ 就是所求的圆.

由作法可知，和三角形的各边都相切的圆可以作出一个且只可以作出一个.

和三角形各边都相切的圆叫做**三角形的内切圆**，内切圆的圆心叫做三角形的**内心**，这个三角形叫做**圆的外切三角形**.

和多边形的各边都相切的圆叫做**多边形的内切圆**，这个多边形叫做**圆的外切多边形**.

例 2 如图 7-48，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50°$，$\angle ACB=75°$，点 O 是内心，求 $\angle BOC$ 的度数.

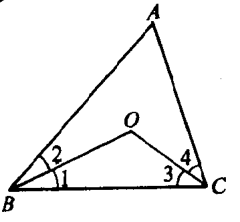


图 7-48

解：∵ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$$\therefore \quad \angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 50°=25°.$$

同理 $$\angle 3=\angle 4=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times 75°=37.5°.$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \angle BOC &=180°-(\angle 1+\angle 3)\\ &=180°-(25°+37.5°)\\ &=117.5°.\end{aligned}$$

$\therefore$ $\angle BOC$ 等于 117.5°.

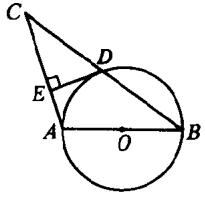
练 习

分别作出已知的锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的内切圆，并说明三角形的内心是否都在三角形内.

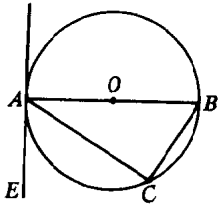
习 题 7.3

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：
   (1) 直线和圆有几种位置关系？一条直线和圆最多有几个公共点？
   (2) 什么叫做圆的切线？怎样判定一条直线是圆的切线？圆的切线有什么性质？
   (3) 什么叫做三角形的内切圆？什么叫做三角形的内心？怎样作已知三角形的内切圆？
2. 已知圆的直径为 10cm，圆心到直线 l 的距离是：(1)3cm；(2)5cm；(3) 7cm，直线和圆有几个公共点？为什么？
3. 已知 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 $AB=6$cm，直角边 $AC=3$cm. 圆心为 C，半径分别为 2cm、4cm 的两个圆与 AB 有怎样的位置关系？半径多长时，AB 与圆相切？
4. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，$\odot O$ 过 BC 的中点 D，$DE\perp AC$. 求证：DE 是$\odot O$ 的切线.



(第 4 题)



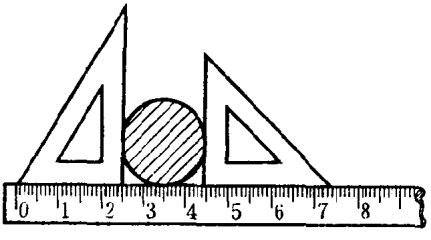
(第 5 题)

5. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，AB 为直径，$\angle CAE=\angle B$.

求证：AE 与$\odot O$ 相切于点 A.

6. (1) 求证：如果圆的两条切线互相平行，则连结两个切点的线段是直径.

(2) 如图，可以利用刻度尺和三角板测量圆形工件的直径. 说明测量的道理.



(第6题(2))

7. 两个同心圆中，大圆的弦 AB 和 AC 分别和小圆相切于点 D 和 E.

求证：$DE \leqslant \frac{1}{2}BC$.

8. MN 是$\odot O$ 的切线，AB 是$\odot O$ 的直径. 求证：点 A、B 与 MN 的距离的和等于$\odot O$ 的直径.

9. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线交于 O，$\odot O$ 和 AB 相切，求证：$\odot O$ 和菱形的其他各边也相切.

10. 求证：

(1) 等边三角形的内心也是它的外心；

(2) 等边三角形的外接圆半径 R 是内切圆半径 r 的2倍.

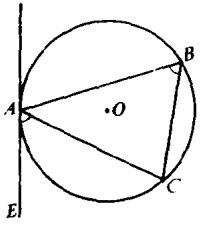
11. $\triangle ABC$ 中，内切圆 I 和边 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F. 求证：$\angle FDE=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

12. $\triangle ABC$ 中，E 是内心，$\angle A$ 的平分线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D. 求证：$DE=DB$.

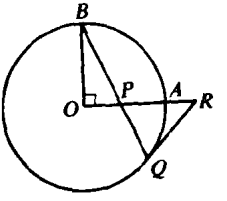
B 组

1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，AB 为非直径的弦，$\angle CAE=\angle B$.

   求证：AE 与 $\odot O$ 相切于点 A.



（第 1 题）



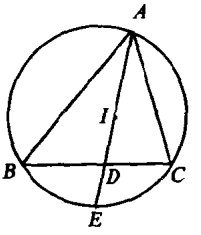
（第 2 题）

2. 如图，OA 和 OB 是 $\odot O$ 的半径，并且 $OA\perp OB$，P 是 OA 上任一点，BP 的延长线交 $\odot O$ 于 Q，过 Q 的 $\odot O$ 的切线交 OA 的延长线于 R.

   求证：$RP=RQ$.

3. 如图，点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，AI 交边 BC 于点 D，交 $\triangle ABC$ 外接圆于点 E.

   求证：IE 是 AE 和 DE 的比例中项.



（第 3 题）

*7.10 切线长定理

如图 7-49，过圆外一点有两条直线 PA、PB 与 $\odot O$ 相切. 在经过圆外一点的圆的切线上，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的**切线长**.

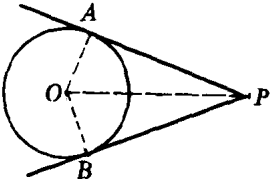


图 7-49

如图 7-49 中，连结 OA、OB、OP.

∵ PA、PB 与 $\odot O$ 相切，点 A、B 是切点，

∴ $OA \perp AP$，$OB \perp BP$.

∴ $\angle OAP$、$\angle OBP$ 都是直角.

∵ $OA=OB$，$OP=OP$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle AOP \cong \mathrm{Rt}\triangle BOP$.

∴ $PA=PB$，$\angle OPA=\angle OPB$.

由此得到下面的定理：

切线长定理　从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.

例 1 已知：如图 7-50，P 为⊙O 外一点，PA、PB 为⊙O 的切线，A 和 B 是切点，BC 是直径. 求证：AC // OP.

证明：连结 AB.

PA、PB 分别切⊙O 于 A、B

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}PA=PB\\ \angle OPA=\angle OPB\end{array}\right\}\Rightarrow OP\perp AB\\ BC\text{ 为⊙}O\text{ 的直径 }\Rightarrow AC\perp AB\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow AC\,//\,OP.$$

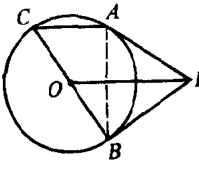


图 7-50

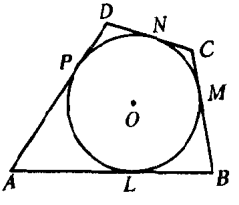


图 7-51

例 2 圆的外切四边形的两组对边的和相等.

已知：四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 和⊙O 分别相切于点 L、M、N、P(图 7-51).

求证：$AB+CD=AD+BC$.

证明：因为 AB、BC、CD、DA 都与⊙O 相切，L、M、N、P 是切点，

$\therefore \quad AL=AP, LB=MB,$

$DN=DP, NC=MC.$

$\therefore \quad AL+LB+DN+NC$

$=AP+MB+DP+MC$

$=AP+DP+MB+MC,$

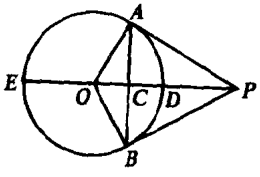
即

$$AB+CD=AD+BC.$$

练　习

1. 已知：⊙O 的半径为 3 厘米，点 P 和圆心 O 的距离为 6 厘米. 经过点 P 有⊙O 的两条切线，求这两条切线的夹角及切线长.

2. 如图，PA、PB 是⊙O 的两条切线，A、B 为切点. 直线 OP 交⊙O 于点 D、E，交 AB 于 C.



（第 2 题）

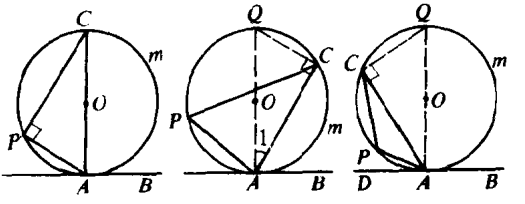
(1)写出图中所有的垂直关系；

(2)写出图中所有的全等三角形.

3. 已知：在△ABC 中，$BC=14$cm，$AC=9$cm，$AB=13$cm，它的内切圆分别和 BC、AC、AB 切于点 D、E、F，求 AF、BD 和 CE 的长.

*7.11 弦切角

顶点在圆上，一边和圆相交、另一边和圆相切的角叫做**弦切角**. 图 7-52(1)、(2)、(3)中，$\angle BAC$ 是弦切角. 弦切角也可以看作圆周角的一边绕顶点旋转到与圆相切时所成的角.



(1)　　(2)　　(3)

图 7-52

弦切角定理　弦切角等于它所夹的弧对的圆周角.

已知：AC 是$\odot O$ 的弦，AB 是$\odot O$ 的切线，$\overset{\frown}{AmC}$ 是弦切角$\angle BAC$ 所夹的弧，$\angle P$ 是$\overset{\frown}{AmC}$所对的圆周角(图 7-52).

求证：$\angle BAC=\angle P$.

证明：分三种情况讨论.

(1) 圆心 O 在$\angle BAC$ 的边 AC 上(图 7-52(1)).

$\because$　AB 是$\odot O$ 的切线，

$\therefore$　$\angle BAC=90°$.

又∵ $\overset{\frown}{AmC}$是半圆，

∴ $\angle P=90°$.

∴ $\angle BAC=\angle P$.

(2) 圆心 O 在$\angle BAC$ 的外部(图 7-52(2)).

作⊙O 的直径 AQ，连结 CQ.

∵ $\angle BAQ=\angle ACQ=90°$，

∴ $\angle BAC=90°-\angle 1$，$\angle Q=90°-\angle 1$.

∴ $\angle BAC=\angle Q$.

又∵ $\angle Q=\angle P$，

∴ $\angle BAC=\angle P$.

(3) 圆心 O 在$\angle BAC$ 的内部(图 7-52(3)).

作⊙O 的直径 AQ，连结 CQ.

∵ $\angle BAC=180°-\angle DAC$，

$\angle P=180°-\angle Q$，

又由(2)可知，$\angle DAC=\angle Q$，

∴ $\angle BAC=\angle P$.

推论　如果两个弦切角所夹的弧相等，那么这两个弦切角也相等.

例 1　如图 7-53，已知 AB 是⊙O 的直径，AC 是弦，直线 CE 和⊙O 切于点 C，$AD\perp CE$，垂足为 D. 求证：AC 平分$\angle BAD$.

证明：连结 BC.

$\because$ AB 是$\odot O$的直径，

$\therefore$ $\angle ACB=90°$.

$\therefore$ $\angle B+\angle CAB=90°$.

$\because$ $AD\perp CE$，

$\therefore$ $\angle ADC=90°$.

$\therefore$ $\angle ACD+\angle DAC=90°$.

$\because$ AC 是弦，且 CE 和$\odot O$切于点 C，

$\therefore$ $\angle ACD=\angle B$.

$\therefore$ $\angle DAC=\angle CAB$.

因此 AC 平分$\angle BAD$.

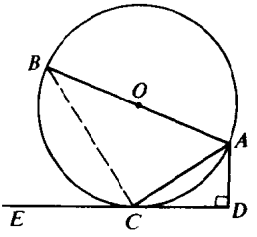
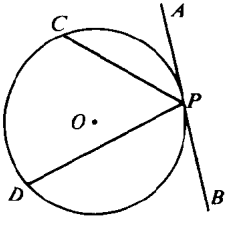


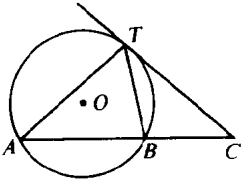
图 7-53

练 习

1. 如图，直线 AB 和$\odot O$相切于点 P，PC 和 PD 为弦，指出图中所有的弦切角.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，经过$\odot O$上的点 T 的切线和弦 AB 的延长线相交于点 C. 求证：$\angle ATC=\angle TBC$.

例 2 已知：如图 7-54，⊙O 和⊙O'都经过 A、B 两点，AC 是⊙O'的切线，交⊙O 于点 C，AD 是⊙O 的切线，交⊙O'于点 D.

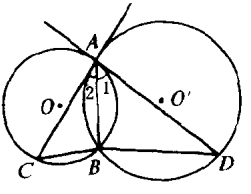


图 7-54

求证：$AB^2=BC\cdot BD$.

证明：∵ $\angle C=\angle 1$，$\angle 2=\angle D$，

∴ $\triangle ACB\backsim\triangle DAB$.

∴ $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}$.

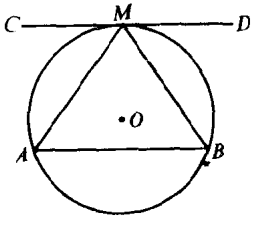
∴ $AB^2=BC\cdot BD$.

练 习

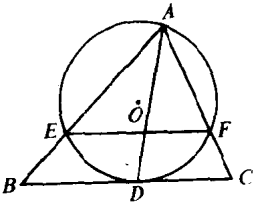
1. 如图，AB 是⊙O 的弦，CD 是经过⊙O 上一点 M 的切线.

求证：(1) $AB//CD$ 时，$AM=MB$；

(2) $AM=MB$ 时，$AB//CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 在△ABC 中，$\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 于 D，⊙O 过点 A，且和 BC 切于 D，和 AB、AC 分别交于 E、F. 求证：$EF//BC$.

*7.12 和圆有关的比例线段

相交弦定理　圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.

已知：弦 AB 和 CD 交于⊙O 内一点 P(图 7-55).

求证：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

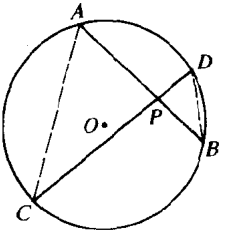


图 7-55

证明：连结 AC、BD. 由圆周角定理的推论，得

$$\left.\begin{matrix}\angle A=\angle D\\ \angle C=\angle B\end{matrix}\right\}\Rightarrow \triangle PAC\backsim\triangle PDB$$

$$\Rightarrow PA : PD = PC : PB$$

$$\Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

由相交弦定理，可以得出下面的推论：

推论　如果弦与直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项.

如图 7-56，CD 是弦，AB 是直径，$CD \perp AB$，垂足是 P，则

$$PC^2 = PA \cdot PB.$$

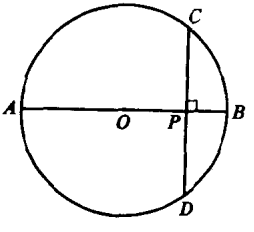


图 7-56

例 1　已知圆中两条弦相交，第一条弦被交点分为 12cm 和 16cm 两段，第二条弦的长为 32cm，求第二条弦被交点分成的两段的长.

解：设第二条弦被交点分成的一段长为 $x$cm，则另一段长为$(32-x)$cm. 根据相交弦定理，有

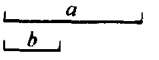
$x(32-x)=12\times16$，即 $x^2-32x+192=0$.

解得 $x_1=8$ 或 $x_2=24$.

∴ 另一段长为 $32-x_1=24$ 或 $32-x_2=8$.

另一弦被交点分成的两段长分别为 8cm、24cm.

例 2 已知：线段 a、b(图 7-57).



求作：线段 c，使 $c^2=ab$.

作法：1. 作线段 $AP=a$.

2. 延长 AP 到点 B，使 $PB=b$.

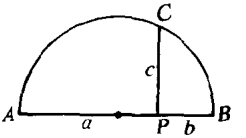


图 7-57

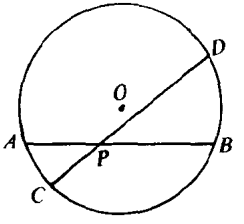
3. 以 AB 为直径作半圆.

4. 过点 P 作 $PC\perp AB$，交半圆于点 C.

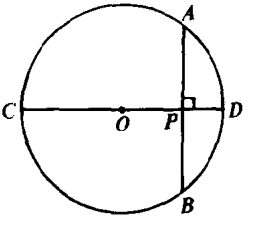
PC 就是 a、b 的比例中项 c.

练 习

1. 如图，$AP=3$ 厘米，$PB=5$ 厘米，$CP=2.5$ 厘米. 求 CD.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，O 是圆心，$OP\perp AB$，$AP=4$ 厘米，$PD=2$ 厘米. 求 OP.

切割线定理　从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项.

已知：点 P 是⊙O 外一点，PT 是切线，T 是切点，PA 是割线，点 A、B 是它与⊙O 的交点(图 7-58).

求证：$PT^2=PA\cdot PB$.

证明：连结 TA、TB.

$$\left.\begin{matrix}\angle BPT=\angle TPA\\ \angle 1=\angle A\end{matrix}\right\}\Rightarrow \triangle BPT\backsim\triangle TPA$$

$$\Rightarrow PB:PT=PT:PA\Rightarrow PT^2=PA\cdot PB.$$

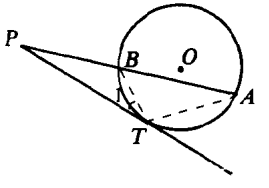


图　7-58

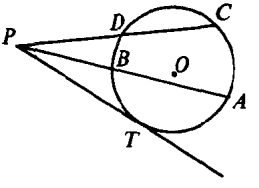


图　7-59

推论　从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等.

如图 7-59 中，$PA\cdot PB=PC\cdot PD$(都等于 PT^2).

例 3　已知：如图 7-60，⊙O 的割线 PAB 交⊙O 于点 A 和 B，$PA=6$cm，$AB=8$cm，$PO=10.9$cm，求⊙O 的半径.

解：设⊙O 的半径为 r，PO 和它的延长线交⊙O 于 C、D.

根据切割线定理的推论，有

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

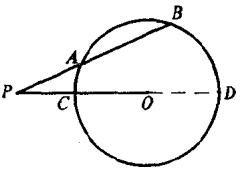


图 7-60

$\because$ $PB = PA + AB = 14$,

$PC = 10.9 - r$,

$PD = 10.9 + r$,

$\therefore$ $(10.9 - r)(10.9 + r) = 6 \times 14$.

取正数解，得 $r = 5.9(\text{cm})$.

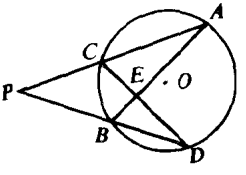
$\therefore$ $\odot O$ 的半径为 5.9cm.

练 习

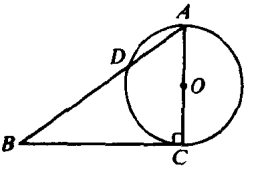
1. 选择题：如图，$\odot O$ 的两条弦 AB、CD 相交于点 E，AC 和 DB 的延长线交于点 P，下列结论中成立的是（ ）

(A) $PC \cdot CA = PB \cdot BD$. (B) $CE \cdot AE = BE \cdot ED$.

(C) $CE \cdot CD = BE \cdot BA$. (D) $PB \cdot PD = PC \cdot PA$.



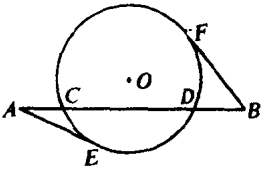
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边 AC、BC 的长分别为 3cm、4cm. 以 AC 为直径作圆与斜边 AB 交于点 D. 求 BD 的长.

3. 如图，线段 AB 和 $\odot O$ 交于 C、D，$AC = BD$，AE、BF 分别切 $\odot O$ 于 E、F. 求证：$AE = BF$.



（第 3 题）

例 4 如图 7-61，两个以 O 为圆心的同心圆，AB 切大圆于 B，AC 切小圆于 C，交大圆于 D、E. $AB=12$，$AO=15$，$AD=8$，求两圆的半径.

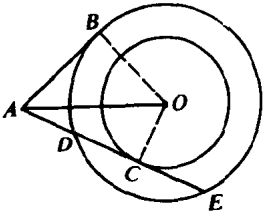


图 7-61

解：连结 OB、OC.

∵ AB 切大圆于 B，AC 切小圆于 C，

∴ $OB\perp AB$，$OC\perp AC$.

∵ DE 是大圆的弦，

∴ $DC=CE$.

在 Rt$\triangle OAB$ 中，有

$$OB=\sqrt{AO^2-AB^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9.$$

在大圆中，根据切割线定理，有

$$AD\cdot AE=AB^2,$$

∴ $8AE=12^2$.

因此 $AE=18$.

∴ $DE=AE-AD=18-8=10$.

∴ $DC=\frac{1}{2}DE=5$.

于是 $AC=AD+DC=8+5=13$.

在 Rt$\triangle OAC$ 中，有

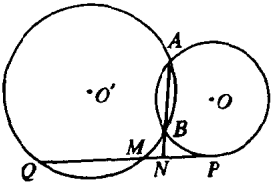
$$OC=\sqrt{AO^2-AC^2}=\sqrt{15^2-13^2}=2\sqrt{14}.$$

∴ 两圆的半径分别为 9 和 $2\sqrt{14}$.

练 习

1. 已知：P 为⊙O 外一点，OP 与⊙O 交于点 A，割线 PBC 与⊙O 交于点 B、C，且 $PB=BC$. 如果 $OA=7$，$PA=2$，求 PC 的长.

2. 已知：如图，⊙O 和⊙O' 都经过点 A 和 B，PQ 切⊙O 于 P，交⊙O' 于 Q、M，交 AB 的延长线于 N. 求证：$PN^2=NM\cdot NQ$.



（第 2 题）

想一想

在工厂测量工件，一般要使用量具. 但有时因为某种工艺要求，无法用量具直接测量. 比如要测量一个很细的管子的内径，通常用的卡钳太大，放不进去. 因此，常采用下面的间接测量方法.

如图 1，把一个钢球放在管子的口上，取管子的一段固定长度. 当钢球放上以后，钢球与这段管子的总高度可以用卡钳量出，于是就可以计算出管子的内径了.

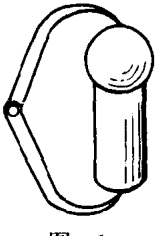


图 1

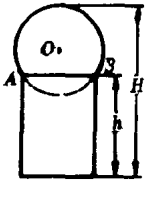


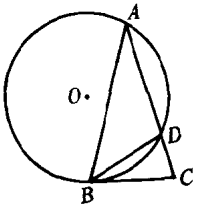
图 2

图 2 是过球心 O 及管子内径的两个端点 A、B 所作的截面图. 如果钢球的直径为 d，管子的长度为 h，钢球与这段管子的总高度为 H. 怎样求出管子的内径 AB？

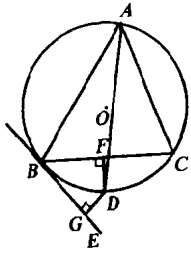
*习 题 7.4

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：
   (1) 什么叫做圆外一点到圆的切线长？切线长定理的内容是什么？这个定理是怎样证明的？
   (2) 什么叫做弦切角？弦切角定理的内容是什么？
   (3) 相交弦定理和切割线定理的内容各是什么？它们是怎样证明的？
2. AB、CD 是⊙O 的切线，$AB \parallel CD$；EF 也是⊙O 的切线，它和 AB、CD 分别相交于点 E 和 F. 求证$\angle EOF = 90°$.
3. △ABC 中，$\angle C$ 是直角，内切圆 I 和边 BC、CA 分别相切于点 D、E. 求证：四边形 $CDIE$ 是正方形.
4. 已知：等腰梯形各边都与⊙O 相切，⊙O 的直径为 6cm，等腰梯形的腰等于 8cm. 求梯形的面积.
5. 如图，在△ABC 中，$AB = AC$，$\angle C = 2\angle A$，⊙O 过 A、B 两点，且与 BC 切于 B，与 AC 交于 D. 求证：$AD = DB = BC$.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 已知：如图，$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线和外接圆 O 相交于点 D，BE 是 $\odot O$ 的切线，$DF \perp BC$，$DG \perp BE$，垂足分别为 F、G.

求证：$DF = DG$.

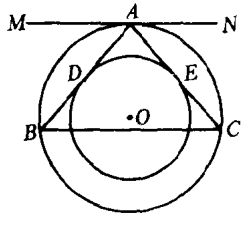
7. $\odot O$ 的弦 AB 的延长线和切线 EP 相交于点 P，E 为切点. $\angle APE$ 的平分线和 AE、BE 分别相交于点 C、D.

求证：$EC = ED$.

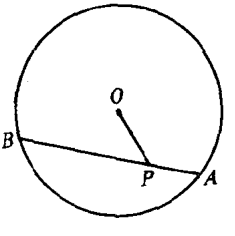
8. 如图，两个同心圆的公共圆心为 O，大圆的弦 AB 和 AC 分别和小圆相切于 D 和 E，直线 MN 和大圆切于点 A.

求证：$MN \parallel BC$.

9. 圆内相交两弦中，一弦被交点所分成的两条线段的长为 4 厘米、7 厘米，另一弦全长为 11.5 厘米. 求这弦被分成的两条线段的长.



（第 8 题）

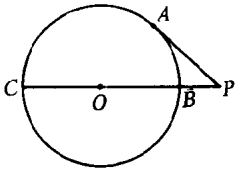


（第 10 题）

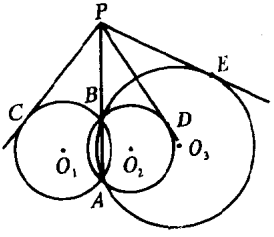
10. 已知：如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，P 是 AB 上一点，$AB = 10\text{cm}$，$PA = 4\text{cm}$，$OP = 5\text{cm}$.

求 $\odot O$ 的半径.

11. 如图，PA 为 $\odot O$ 的切线，A 为切点，PBC 是过点 O 的割线，$PA = 10\text{cm}$，$PB = 5\text{cm}$，求 $\odot O$ 的半径.



（第 11 题）

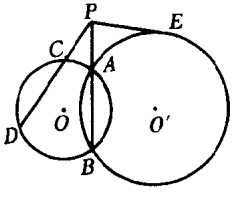


（第 12 题）

12. 如图，$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、…都经过点 A 和 B. 点 P 是线段 AB 延长线上任意一点，且 PC、PD、PE、…分别与 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、…相切于点 C、D、E、….

求证：C、D、E、…在同一个圆上.

13. 如图，$\odot O$ 和 $\odot O'$ 都经过点 A 和 B，点 P 在 BA 的延长线上，过 P 作 $\odot O$ 的割线 PCD 交 $\odot O$ 于 C、D，作 $\odot O'$ 的切线 PE 切 $\odot O'$ 于 E. 若 $PC=4$，$CD=8$，求 PE 的长.



（第 13 题）

14. 作一个正方形，使它的面积等于已知矩形的面积.

B 组

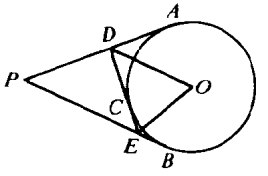
1. 已知：六边形 $ABCDEF$ 的各边都和 $\odot O$ 相切.

求证：$AB+CD+EF=BC+DE+FA$.

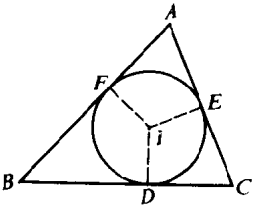
2. 如图，P 是 $\odot O$ 外一点，PA、PB 分别和 $\odot O$ 切于 A、B，$PA=PB=4\text{cm}$，$\angle APB=40°$. C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意一点，过 C 作 $\odot O$ 的切线分别交 PA、PB 于 D、E.

求：(1)$\triangle PDE$ 的周长；

(2) $\angle DOE$ 的度数.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 设$\triangle ABC$ 的边 $BC=a$、$CA=b$、$AB=c$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，内切圆 I 和 BC、AC、AB 分别相切于点 D、E、F. 求证：$AE=AF=s-a$，$BF=BD=s-b$，$CD=CE=s-c$.

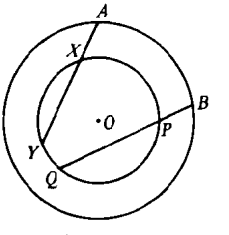
4. 已知$\odot O$ 的半径为 R.

(1) 过$\odot O$ 内一点 P 作弦 AB.

求证：$PA \cdot PB=R^2-OP^2$.

(2) 过$\odot O$ 外一点 P 作割线 PAB. 求证：

$PA \cdot PB=OP^2-R^2$.



(第 5 题)

5. 在以 O 为圆心的两个同心圆中，A、B 为大圆上的任意两点，过 A、B 作小圆的割线 AXY 和 BPQ. 求证：$AX \cdot AY=BP \cdot BQ$.

6. 设 C 为线段 AB 的中点，$BCDE$ 是以 BC 为一边的正方形. 以 B 为圆心，BD 为半径的圆与 AB 及其延长线相交于点 H 及 K. 求证：

(1) $HC \cdot CK=AC^2$；

(2) $AH \cdot AK=2AC^2$.

三　圆和圆的位置关系

7.13　圆和圆的位置关系

在平面内，两圆相对运动，可以得到下面不同的位置关系(图 7-62).

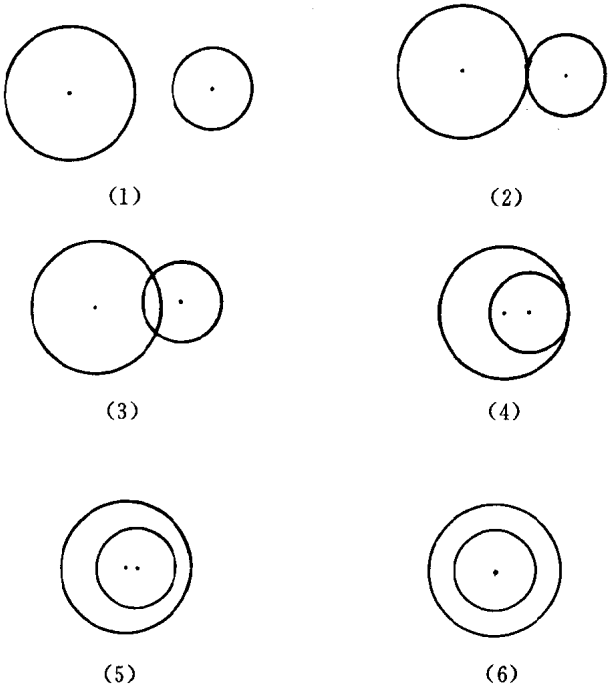


图　7-62

(1) 两个圆没有公共点，并且每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫做这两个圆**外离**(图 7-62(1)).

(2) 两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫做这两个圆**外切**(图 7-62(2)). 这个唯一的公共点叫做**切点**.

(3) 两个圆有两个公共点时，叫做这两个圆**相交**(图 7-62(3)).

(4) 两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆**内切**(图 7-62(4)). 这个唯一的公共点叫做**切点**.

两个圆外切和内切统称两个圆相切.

(5) 两个圆没有公共点，并且一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆**内含**(图 7-62(5)). 两圆同心是两圆内含的一种特例(图 7-62(6)).

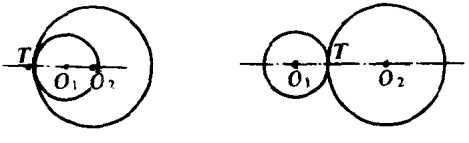
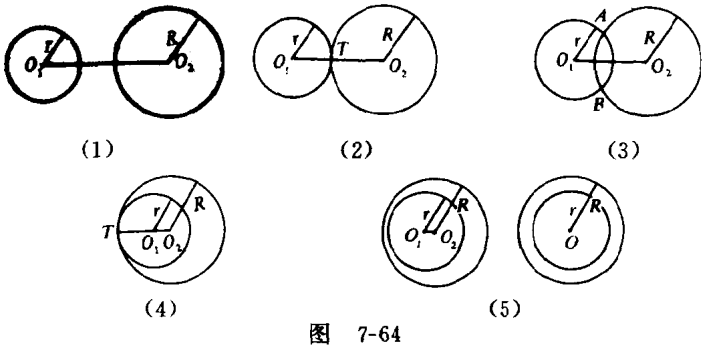


图 7-63

我们知道，圆是轴对称图形，两个圆也组成一个轴对称图形，通过两圆圆心的直线 (连心线)是它的对称轴(图 7-63). 由此可知，**如果两个圆相切，那么切点一定在连心线上**.



(1)　(2)　(3)

(4)　(5)

图 7-64

观察图 7-64 可以发现，当两圆的半径一定时，两圆的位置关系与两圆圆心的距离(圆心距)的大小有关. 设两圆半径分别为 R 和 r，圆心距为 d，那么

(1) **两圆外离** $\Longleftrightarrow d>R+r$；

(2) **两圆外切** $\Longleftrightarrow d=R+r$；

(3) **两圆相交** $\Longleftrightarrow R-r<d<R+r(R\geqslant r)$；

(4) **两圆内切** $\Longleftrightarrow d=R-r(R>r)$；

(5) **两圆内含** $\Longleftrightarrow d<R-r(R>r)$.

例 1　如图 7-65，$\odot O$ 的半径为 5cm，点 P 是 $\odot O$ 外一点，$OP=8$cm.

求：(1) 以 P 为圆心作 $\odot P$ 与 $\odot O$ 外切，小圆 $\odot P$ 的半径是多少？

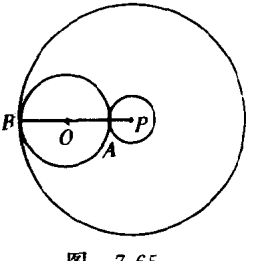


图 7-65

(2) 以 P 为圆心作 $\odot P$ 与 $\odot O$ 内切，大圆 $\odot P$ 的半径是多少？

解：(1) 设⊙O 与⊙P 外切于点 A，则

$$PA=OP-OA.$$

$\therefore$ $PA=3\text{cm}$.

(2) 设⊙O 与⊙P 内切于点 B，则

$$PB=OP+OB.$$

$\therefore$ $PB=13\text{cm}$.

练　习

1. 举出一些能表示两个圆不同位置关系的实例.
2. ⊙O_1 和⊙O_2 的半径分别为 3 厘米和 4 厘米，设
   (1) $O_1O_2=8$ 厘米；　(2) $O_1O_2=7$ 厘米；
   (3) $O_1O_2=5$ 厘米；　(4) $O_1O_2=1$ 厘米；
   (5) $O_1O_2=0.5$ 厘米；　(6) O_1 和 O_2 重合.
   ⊙O_1 和⊙O_2 的位置关系怎样？
3. 定圆 O 的半径是 4 厘米，动圆 P 的半径是 1 厘米.
   (1) 设⊙P 和⊙O 相外切. 那么点 P 与点 O 的距离是多少？点 P 可以在什么样的线上移动？
   (2) 设⊙P 和⊙O 相内切，情况怎样？

设⊙O_1、⊙O_2 相交于点 A、B（图 7-66）. 因为⊙O_1、⊙O_2 组成的图形是以 O_1O_2 为轴的对称图形，所以交点 A、B 关于直线 O_1O_2 对称，由此可得：

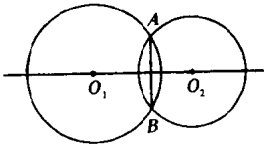


图　7-66

定理　相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦.

例 2 已知两个等圆$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于A、B两点，$\odot O_1$经过点O_2(图 7-67)．求$\angle O_1AB$的度数．

解：$\odot O_1$经过点O_2，$\odot O_1$、$\odot O_2$是等圆

$$\Rightarrow O_1A=O_1O_2=O_2A$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\angle O_1AO_2=60^\circ\\ AB\perp O_1O_2\end{array}\right\}\Rightarrow\angle O_1AB=30^\circ.$$

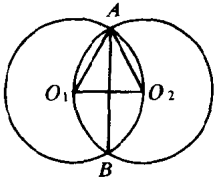


图 7-67

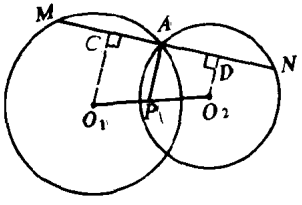


图 7-68

例 3 已知：如图 7-68，A是$\odot O_1$、$\odot O_2$的一个交点，点P是O_1O_2的中点．过点A的直线MN垂直于PA，交$\odot O_1$、$\odot O_2$于M、N．

求证：$AM=AN$．

证明：过点O_1、O_2分别作$O_1C\perp MN$、$O_2D\perp MN$，垂足为C、D，则$O_1C/\!/PA/\!/O_2D$，且$AC=\frac{1}{2}AM$，$AD=\frac{1}{2}AN$．

$$O_1P=O_2P\Rightarrow AC=AD\Rightarrow AM=AN.$$

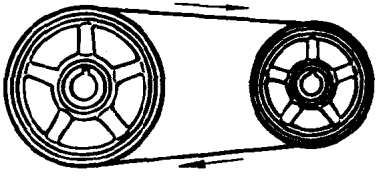
练　习

1. 已知两等圆的半径为 5cm，公共弦长 6cm，求圆心距．
2. 经过相交两圆的一个交点，作两圆的公共弦的垂线．求证：这条直线上被两圆所截得的线段等于圆心距的 2 倍．

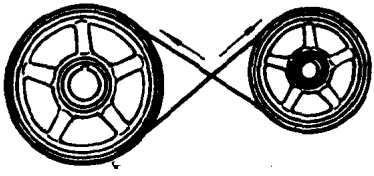
7.14 两圆的公切线

很多机器上的传动带与主动轮、从动轮之间的位置关系，给我们以一条直线和两个圆同时相切的形象(图 7-69).

和两个圆都相切的直线，叫做两圆的**公切线**. 两个圆在公切线同旁时，这样的公切线叫做**外公切线**(如图 7-69(1)). 两个圆在公切线两旁时，这样的公切线叫做**内公切线**(如图 7-69(2)). 公切线上两个切点的距离叫做**公切线的长**.



(1)



(2)

图 7-69

例 1 已知：$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 2cm 和 7cm，圆心距 $O_1O_2=13$cm，AB 是$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的外公切线，切点分别是 A、B(图 7-70).

求：公切线的长 AB.

分析：因为切线垂直于过切点的半径，为求公切线的长 AB，首先应连结 O_1A、O_2B，得直角梯形 O_1ABO_2. 这样，问题就转化为在直角梯形中，已知上、下底和一腰，求另一腰的问题了.

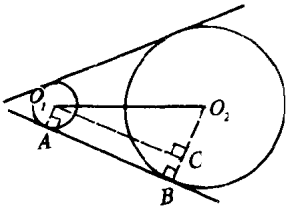


图 7-70

解：连结 O_1A、O_2B，则 $O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$. 过 O_1 作 $O_1C\perp O_2B$，垂足为 C，则四边形 O_1ABC 为矩形，于是有

$$O_1C\perp CO_2,\ O_1C=AB,\ O_1A=CB.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1CO_2$ 中，

$$O_1O_2=13,$$

$$O_2C=O_2B-O_1A=5,$$

$$\therefore\quad O_1C=\sqrt{13^2-5^2}=12(\mathrm{cm}).$$

$$\therefore\quad AB=12\mathrm{cm}.$$

由圆的对称性可知，图 7-70 中有两条外公切线，并且这两条外公切线的长相等.

练　习

已知⊙O_1、⊙O_2 的半径分别为 15cm 和 5cm，它们外切于点 T. 外公切线 AB 与⊙O_1、⊙O_2 分别切于点 A、B. 求外公切线的长 AB.

例 2 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为 4cm 和 2cm，圆心距为 10cm，AB是$\odot O_1$、$\odot O_2$的内公切线，切点分别为 A、B(图 7-71). 求公切线的长 AB.

分析：可以仿照例 1 作辅助线(如图 7-71)，不过，$\triangle O_1CO_2$ 中，边 O_2C 等于两圆半径的和.

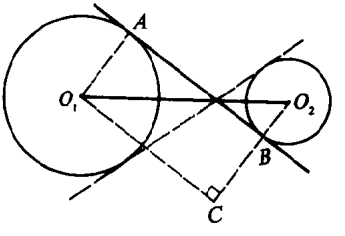


图 7-71

解：连结 O_1A、O_2B，则 $O_1A \perp AB$，$O_2B \perp AB$. 过点 O_1 作 $O_1C \perp O_2B$，交 O_2B 的延长线于点 C，则 $AB=O_1C$，$BC=O_1A$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1CO_2$ 中，$O_1O_2=10$，

$$O_2C=O_2B+O_1A=6,$$

$$\therefore\quad O_1C=\sqrt{10^2-6^2}=8(\mathrm{cm}).$$

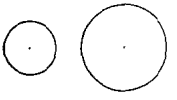
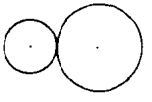
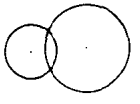
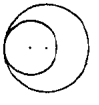
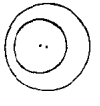
$$\therefore\quad AB=8\mathrm{cm}.$$

由圆的对称性可知，图 7-71 中有两条内公切线，并且这两条内公切线的长相等. 另外，如果两圆有两条外(或内)公切线，并且它们相交，那么交点一定在两圆的连心线上.

练 习

1. 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为 1.5cm 和 2.5cm，$O_1O_2=6$cm，求内公切线的长.

2. 如表中图，不同位置的两圆都有外公切线吗？都有内公切线吗？如果有，有几条？在图上画出草图，并把结果填入下表.

位置	图　形	内公切线数	外公切线数
			
			
			
			
			

* **例 3**　要做一个如图 7-72 那样的 V 形架，将两个钢管托起，已知钢管的外径分别为 200mm 和 80mm，求 V 形角 α 的度数.

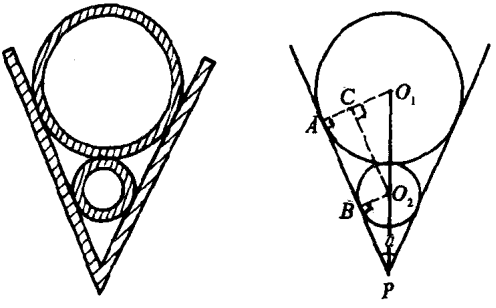


图 7-72

解：设两圆管的圆心分别为 O_1、O_2，它们与 V 形架切于点 A、B，AB 与 O_1O_2 交于点 P(图 7-72). 连结 O_1A、O_2B，则 $O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$. 过点 O_2 作 $O_2C\perp O_1A$，垂足为 C，则 $CO_2/\!/AP$，$\angle O_1O_2C=\angle O_1PA=\frac{1}{2}\angle\alpha$，设 $\angle O_1O_2C$ 为 $\angle\beta$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2C$ 中，

$$\sin\beta=\frac{O_1C}{O_1O_2}=\frac{60}{140}\approx 0.4286,$$

$\therefore\quad \angle\beta=25°23'$，

$\therefore\quad \angle\alpha=50°46'$.

答：V 形角 α 为 $50°46'$.

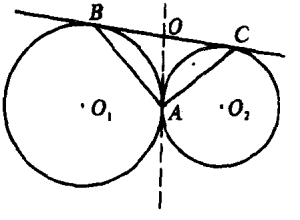


图 7-73

* **例 4**　如图 7-73，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A，BC 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的公切线，B、C 为切点.

求证：$AB\perp AC$.

证明：过点 A 作$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的内公切线交 BC 于点 O.

因为 OB、OA 是$\odot O_1$ 的切线，

$\therefore\quad OB=OA.$

同理　$OC=OA.$

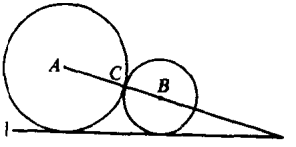
$\therefore\quad OB=OA=OC,$

$\therefore\quad AB\perp AC.$

注意　在解决有关两圆相切的问题时，常常要借助它们的公切线，所以过切点作两圆的公切线是常见的一种作辅助线的方法.

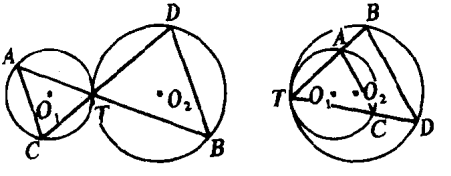
练　习

1. 如图，$\odot A$、$\odot B$ 外切于点 C，它们的半径分别为 5cm、2cm. 直线 l 与$\odot A$、$\odot B$ 都相切. 求直线 AB 与 l 所成的锐角.



（第 1 题）

*2. 已知：如图，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 相切于点 T，直线 AB、CD 经过点 T，交$\odot O_1$ 于点 A、C，交$\odot O_2$ 于点 B、D. 求证：$AC\parallel BD$.



（第 2 题）

7.15 相切在作图中的应用

画运动场上的跑道、机器零件图(图 7-74)等,常

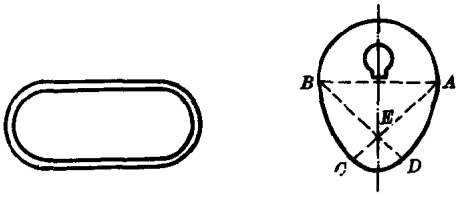


图 7-74

常需要由一条线(线段或圆弧)平滑地过渡到另一条线上,这种平滑地过渡,通常称圆弧连接,简称连接. 连接时,线段与圆弧,圆弧与圆弧在连接处相切(图 7-75,图 7-76).

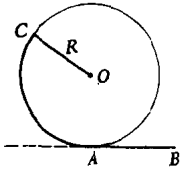


图 7-75

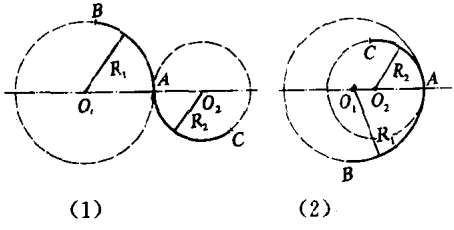


图 7-76

图 7-75 中,线段 AB 和 $\overset{\frown}{AC}$ 在点 A 连接,AB 与 $\odot O$ 相切于点 A. 图 7-76 中 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 在点 A 连接,$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相切于点 A.

图 7-76(1)中，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A，我们称在连心线 O_1O_2 两旁的 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 在点 A 外连接. 图 7-76(2)中，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切于点 A，我们称在连心线 O_1O_2 两旁的 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 在点 A 内连接.

例 1 已知：线段 AB 和 r（图 7-77）.

求作：$\overset{\frown}{AC}$，使它的半径等于 r，并且在点 A 与线段 AB 连接.

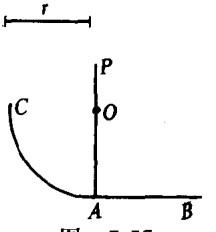


图 7-77

作法：1. 过点 A 作直线 $PA \perp AB$.

2. 在射线 AP 上取 $AO=r$.

3. 以 O 为圆心，r 为半径作 $\overset{\frown}{AC}$，使 AB、$\overset{\frown}{AC}$ 在 OA 的两侧.

$\overset{\frown}{AC}$ 就是所求作的弧.

例 2 已知：如图 7-78，$\overset{\frown}{AB}$ 的半径为 R_1，圆心为 O_1；线段 R_2.

求作：半径为 R_2 的 $\overset{\frown}{AC}$，使 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 A 外连接.

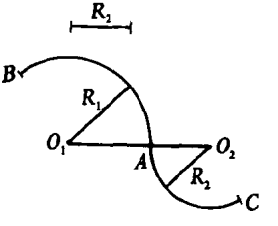


图 7-78

分析：要作 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 外连接，就是要作 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 所在的圆在点 A 外切. 因此 $\overset{\frown}{AC}$ 所在的圆的圆心 O_2 一定在 O_1A 的延长线上，并且 $O_1O_2=R_1+R_2$.

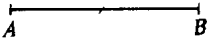
作法：1. 连结 O_1A，并延长到点 O_2，使 $O_1O_2=R_1+R_2$.

2. 以 O_2 为圆心，R_2 为半径作 $\overset{\frown}{AC}$，使 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 在 O_1O_2 的两侧.

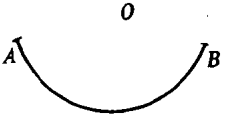
$\overset{\frown}{AC}$ 就是所求的弧.

练　习

1. 已知线段 AB（如图），画一个半径为 1.5cm 的圆弧 $\overset{\frown}{BC}$，使它与线段 AB 在点 B 连接.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径为 2cm（如图），画一条弧 $\overset{\frown}{AC}$，使它的半径为 1cm，并且在点 A 与 $\overset{\frown}{AB}$ 内连接.

例 3　如图 7-79，要把零件中直角 A 加工成半径为15mm的圆角（即用一条半径为15mm的圆弧连接边 AB 与边 AC）. 在图上画出这条圆弧.

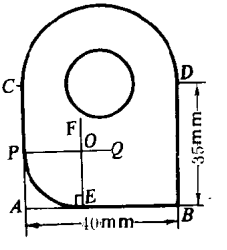


图　7-79

分析：圆弧的半径已知，要画这条圆弧，只要求出它的圆心即可. 如图 7-79，因为这条圆弧要与 AB 和 AC 都相切，所以圆心到边 AB 和 AC 的距离都等于 15mm.

画法：1. 在 AB 上取 $AE=15$mm，过点 E 作 $EF\perp AB$.

2. 在 AC 上取 $AP=15$mm，过点 P 作 $PQ\perp AC$，EF、PQ 相交于点 O.

3. 以 O 为圆心，15mm 为半径画弧，分别与 AB、AC 相切于点 E、P.

$\overset{\frown}{EP}$就是所要画的弧.

因为点 O 到 AB、AC 的距离相等，所以点 O 在 $\angle A$ 的平分线上. 由此可得本题的另一种画法：如图 7-80，画 $\angle A$ 的平分线 AE，再画一条直线 $MN/\!/AB$(或 AC)，使它与 AB(或 AC)的距离等于 15mm，AE 与 MN 的交点 O 即为所求弧的圆心.

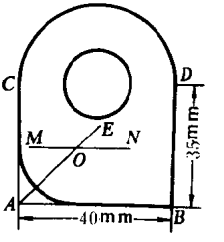


图 7-80

练　习

把两边长分别为 8cm 和 5cm 的矩形的 4 个直角改画成圆角，使圆弧的半径等于 1cm.

做一做

图 1 是一个圆柱. 圆柱的底面是圆，但看起来像一个椭圆，所以在图上画成椭圆才有立体感. 你会画椭圆吗？下面介绍一种椭圆的近似画法.

如图 2. 1. 任取一条线段为边，画一个锐角等于 60°的菱形 $ABCD$.

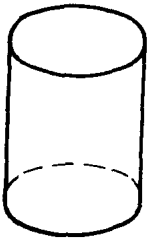


图 1

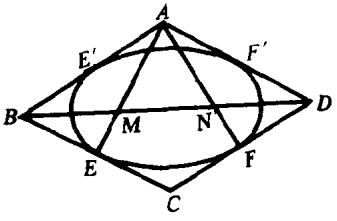


图 2

2. 取 BC、CD 的中点 E、F. 连结 BD、AE、AF，AE、AF 交 BD 于点 M、N.

3. 以点 A 为圆心，AE 为半径画弧 $\overset{\frown}{EF}$. 以 C 为圆心，AE 为半径画弧 $\overset{\frown}{E'F'}$，分别与 AB、AD 相切于点 E'、F'.

4. 分别以 M、N 为圆心，ME 为半径画弧 $\overset{\frown}{EE'}$、$\overset{\frown}{FF'}$，与 $\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{E'F'}$ 连接.

$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FF'}$、$\overset{\frown}{E'F'}$、$\overset{\frown}{EE'}$ 4 条弧组成的图形就是一个椭圆的近似图形.

想一想，$\overset{\frown}{EE'}$ 与 $\overset{\frown}{EF}$ 为什么是连接的？

习 题 7.5

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 两个圆有哪几种位置关系(画图说明)？

(2) 两圆的位置关系与两圆的半径、圆心距的大小有什么关系？

(3) 相交两圆的连心线与公共弦有什么关系？

(4) 什么叫两圆的公切线？什么叫内公切线？什么叫外公切线？什么叫公切线的长？

(5) 怎样画一条圆弧与一条线段连接？怎样画两条圆弧连接？

2. 设 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别为 R、r，圆心距为 d. 在下列情况下，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的位置关系怎样？

(1) $R = 6\text{cm}, r = 3\text{cm}, d = 4\text{cm}$；

(2) $R = 6\text{cm}, r = 3\text{cm}, d = 0$；

(3) $R = 3\text{cm}, r = 7\text{cm}, d = 4\text{cm}$；

(4) $R = 1\text{cm}, r = 6\text{cm}, d = 7\text{cm}$；

(5) $R = 6\text{cm}, r = 3\text{cm}, d = 10\text{cm}$；

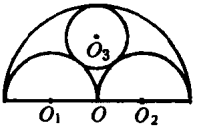
(6) $R = 5\text{cm}, r = 3\text{cm}, d = 3\text{cm}$；

(7) $R = 3\text{cm}, r = 5\text{cm}, d = 1\text{cm}$.

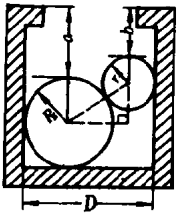
3. 三角形的三边长分别为 4cm、5cm、6cm，以各顶点为圆心的三个圆两两外切. 求各圆的半径.

4. 画三个半径分别为 2cm、2.5cm、4cm 的圆，使它们两两外切.

5. 已知图中各圆两两相切，$\odot O$ 的半径为 $2R$，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径为 R. 求 $\odot O_3$ 的半径.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 用半径 $R = 8\text{mm}$、$r = 5\text{mm}$ 的钢球测量口小内大的内孔的直径 D. 测得钢球顶点与孔口平面的距离分别为 $a = 12.5\text{mm}$、$b = 8.3\text{mm}$（如图），计算出内孔直径 D 的大小（精确到 0.1mm）.

7. 已知：$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A 和 B，经过点 A 的直线分别交两圆于点 C 和 D，经过点 B 的直线分别交两圆于点 E 和 F，且 $CD \parallel EF$.

求证：(1)$CD = EF$；(2)$CE = DF$.

8. 已知 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于点 A、B，且两圆的半径都等于公共弦长 AB，$AB = a$. 求 $\angle AO_1B$ 和 O_1O_2.

9. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 B 和 C，A 是 $\odot O_1$ 上另一点，AT 是 $\odot O_1$ 的切线，又直线 AB 与 AC 分别交 $\odot O_2$ 于点 D 和 E. 求证：$AT \parallel DE$.

10. 两圆半径分别是 4cm 和 2cm，一条外公切线长为 4cm. 求它们的圆心距.

11. 已知两个圆外切，它们的两条外公切线互相垂直，其中大圆的半径等于 5cm. 求小圆半径及外公切线的长.

12. 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别为 20cm 和 12cm，$O_1O_2 = 40\text{cm}$，O_1O_2 与一条内公切线相交于点 P.

求 PO_1、PO_2 的长.

13. 两圆半径为 38mm 和 22mm，圆心距为 65mm. 求

(1) 内公切线长；

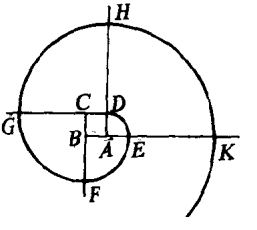
(2) 内公切线与连心线的夹角.

*14. 已知：$\odot O$ 和 $\odot O'$ 外切于点 A，经过点 A 作直线 BC 和 DE，BC 交 $\odot O$ 于点 B、交 $\odot O'$ 于点 C，DE 交 $\odot O$ 于点 D、交 $\odot O'$ 于点 E，$\angle BAD = 40°$，$\angle ABD = 70°$. 求：$\angle AEC$ 的度数.

*15. 经过相内切的两圆的切点 A 作大圆的弦 AD、AE，设 AD、AE 分别和小圆相交于点 B、C. 求证：$AB : AC = AD : AE$.

16. 如图，操场上两条直的跑道 AB、CD 是矩形的一组对边. 在图上用两条半圆将 AB、CD 分别在 A、C 和 B、D 处连接起来.

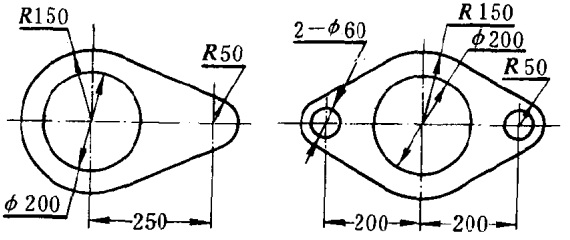
(第 16 题)



(第 17 题)

17. 如图，$ABCD$ 是正方形，曲线 $DEFG\cdots$ 叫做“正方形的渐开线”，其中 $\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FG}$、$\overset{\frown}{GH}$、… 的圆心依次按 A、B、C、D 循环，它们依次相连接. 取 $AB = 10\text{mm}$，画图.

18. 根据图中标注的尺寸，按 1∶5 的比例尺画出下列图样.



（第 18 题）

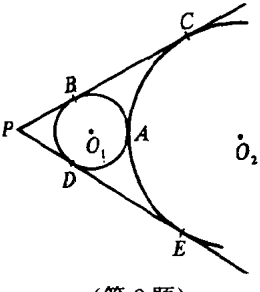
B 组

1. 已知：$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 C 和 D，O_2O_1 的延长线和 $\odot O_1$ 相交于点 A，AC、AD 分别和 $\odot O_2$ 相交于点 E、F.

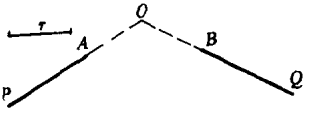
   求证：$CE = DF$.

2. 如图，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切于点 A，外公切线 BC、DE 分别与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 切于点 B、C 和 D、E，并相交于点 P.

   已知 $\angle BPD = 60°$，求 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 半径的比.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 要修一段半径为 r 的圆弧弯道把公路 AP、BQ 连接起来，在图上画出 $\overset{\frown}{AB}$.

四　正多边形和圆

7.16　正多边形和圆

各边相等，各角也相等的多边形叫做**正多边形**. 例如，等边三角形是正三角形，正方形是正四边形. 如果一个正多边形有n条边，那么这个正多边形叫正n边形.

在工程技术和实用图案等方面，常常用到正多边形（图 7-81）. 其中正三角形、正方形、正五边形、正六边形、正八边形等应用较多.

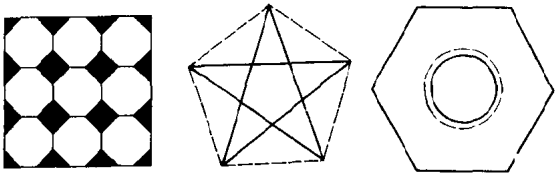


图　7-81

正多边形和圆有非常密切的关系. 根据下面定理，我们只要把一个圆分成n条相等的弧，就可以作出这个圆的内接或外切正n边形.

定理　把圆分成$n(n \geqslant 3)$等份：

(1) 依次连结各分点所得的多边形是这个圆的内接正n边形；

(2) 经过各分点作圆的切线，以相邻切线的交点为顶点的多边形是这个圆的外切正n边形.

我们以 $n=5$ 的情况为例来进行证明.

已知：$\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$，$TP$、$PQ$、$QR$、$RS$、$ST$ 分别是经过分点 A、B、C、D、E 的 $\odot O$ 的切线（图 7-82）.

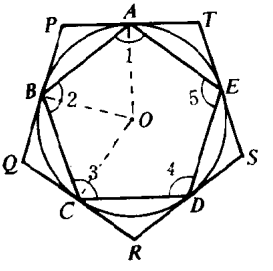


图 7-82

求证：(1) 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形；

(2) 五边形 $PQRST$ 是 $\odot O$ 的外切正五边形.

证明：(1) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$

$$\Rightarrow\begin{cases}AB=BC=CD=DE=EA,\\ \overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}=3\overset{\frown}{AB}\end{cases}\Rightarrow\angle 1=\angle 2.$$

同理 $\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5$.

又因为顶点 A、B、C、D、E 都在 $\odot O$ 上，所以五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形.

(2) 连结 OA、OB、OC，则

$$\angle OAB=\angle OBA=\angle OBC=\angle OCB.$$

$\because$ TP、PQ、QR 分别是以 A、B、C 为切点的 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$ $\angle OAP=\angle OBP=\angle OBQ=\angle OCQ$.

$\therefore$ $\angle PAB=\angle PBA=\angle QBC=\angle QCB$.

又 $\because$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，

$\therefore$ $AB=BC$.

$\therefore$ $\triangle PAB$ 与 $\triangle QBC$ 是全等的等腰三角形.

$\therefore$ $\angle P = \angle Q, PQ = 2PA$.

同理 $\angle Q = \angle R = \angle S = \angle T$,

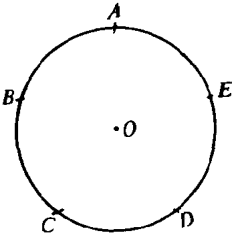
$QR = RS = ST = TP = 2PA$.

又 $\because$ 五边形 $PQRST$ 的各边都与 $\odot O$ 相切,

$\therefore$ 五边形 $PQRST$ 是 $\odot O$ 的外切正五边形.

练　习

1. (口答) 矩形是正多边形吗?菱形是正多边形吗?为什么?
2. 求证:正五边形的对角线相等.
3. 如图,已知点 A、B、C、D、E 是 $\odot O$ 的 5 等分点,画出 $\odot O$ 的内接和外切正五边形.



(第 3 题)

我们知道,只要把一个圆 n 等分,就可以作出这个圆的内接或外切正 n 边形.反过来,是不是每一个正多边形都有一个外接圆和内切圆呢?我们仍以正五边形为例来研究这个问题.

如图 7-83,过正五边形 $ABCDE$ 的顶点 A、B、C 作 $\odot O$,连结 OA、OB、OC、OD.

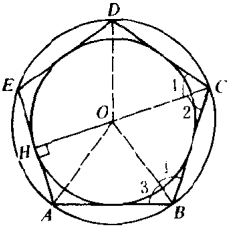


图　7-83

$$\left.\begin{array}{l} OB=OC \Rightarrow \angle 1=\angle 2 \\ \angle ABC=\angle BCD \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \angle 3=\angle 4 \\ OB=OC \\ BA=CD \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle ODC \Rightarrow OA=OD$$

$$\Rightarrow \text{点 } D \text{ 在 } \odot O \text{ 上.}$$

同理，点 E 在 $\odot O$ 上.

所以正五边形 $ABCDE$ 有一个外接圆 $\odot O$.

因为正五边形 $ABCDE$ 的各边是 $\odot O$ 中相等的弦，所以弦心距相等. 因此，以点 O 为圆心，以弦心距 (OH) 为半径的圆与正五边形的各边都相切. 可见正五边形 $ABCDE$ 还有一个以 O 为圆心的内切圆. 于是得到：

定理　任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆.

正多边形的外接圆（或内切圆）的圆心叫做**正多边形的中心**，外接圆的半径叫做**正多边形的半径**，内切圆的半径叫做**正多边形的边心距**. 正多边形各边所对的外接圆的圆心角都相等. 正多边形每一边所对的外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**. 正 n 边形的每个中心角都等于 $\frac{360^\circ}{n}$.

例如，在图 7-83 中，圆心 O 是正五边形 $ABCDE$ 的中心，OA 是它的一条半径，OH 是它的一条边心距 $(OH \perp AE)$，$\angle AOB$ 是它的一个中心角.

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心. 如果正多边形有偶数条边，那么它又是中心对称图形，它的中心就是对称中心.

边数相同的正多边形相似，所以它们的周长的比等于它们的边长（或半径、边心距）的比，它们的面积的比等于它们的边长（或半径、边心距）平方的比.

练　习

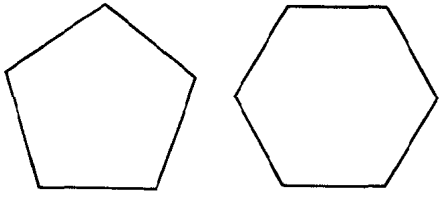
1. （口答）(1) 一个不等边三角形是不是一定有外接圆和内切圆？如果有，这两个圆是不是同心圆？(2) 举例说明：一个四边形不一定有外接圆或内切圆.

2. 求证：在正 n 边形中，

(1) 中心角 $\alpha_n = \dfrac{360^\circ}{n}$；

(2) 中心角与正 n 边形的每个外角相等.

3. 画出图中正五边形、正六边形的所有对称轴.



（第 3 题）

例 1　求证：各角相等的圆外切五边形是正五边形.

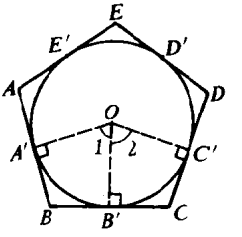


图　7-84

已知：在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$，边 AB、BC、CD、DE、EA 与 $\odot O$ 分别相切于点 A'、B'、C'、D'、E'（图 7-84）.

求证：五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

证明：作 $\odot O$ 的半径 OA'、OB'、OC'，则 $OA'\perp AB$，$OB'\perp BC$，$OC'\perp CD$.

$$\angle B=\angle C\Rightarrow\angle 1=\angle 2\Rightarrow \overset{\frown}{A'B'}=\overset{\frown}{B'C'}.$$

同理　$\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{C'D'}=\overset{\frown}{D'E'}=\overset{\frown}{E'A'}$，

即切点 A'、B'、C'、D'、E' 是 $\odot O$ 的 5 等分点.

所以五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

用同样的方法，我们可以证明各角相等的圆外切 n 边形是正 n 边形.

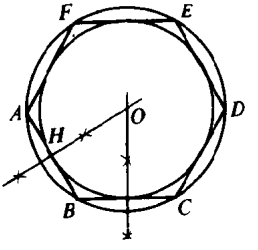


图　7-85

例 2　已知：正六边形 $ABCDEF$（图 7-85）.

求作：正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆和内切圆.

作法：1. 过 A、B、C 三点作 $\odot O$. $\odot O$ 就是所求作的正六边形的外接圆.

2. 以 O 为圆心，以 O 到 AB 的距离(OH)为半径作圆，所作的圆就是正六边形的内切圆.

用同样的方法，我们可以作正 n 边形的外接圆与内切圆.

练　习

1. 求证：各边相等的圆内接多边形是正多边形.

2. (口答) 下列命题是真命题吗？如果不是，举出一个反例.

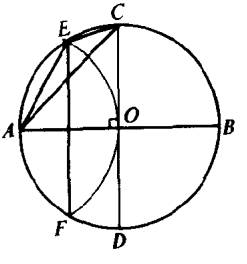
(1) 各边相等的圆外切多边形是正多边形；

(2) 各角相等的圆内接多边形是正多边形.

3. 已知：正方形 $ABCD$. 求作：正方形 $ABCD$ 的外接圆与内切圆.

想一想

在 $\odot O$ 中，如果作两条互相垂直的直径 AB、CD(如图)，那么弦 AC 是 $\odot O$ 内接正四边形的一边；如果以 A 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径画弧，与 $\odot O$ 相交于点 E、F，那么弦 AE、CE、EF 分别是 $\odot O$ 内接正六边形、正十二边形、正三角形的一边. 为什么？



7.17　正多边形的有关计算

根据正多边形的定义和多边形内角和定理，可知正 n 边形的每个内角都等于

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}.$$

下面，我们仍然设法将正多边形划分成一些三角形，应用三角形的知识来解决正多边形的其他有关计算问题.

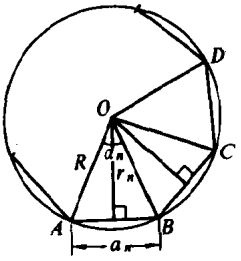


图　7-86

如图 7-86，作正 n 边形的 n 条半径，这些半径把正 n 边形分成了 n 个等腰三角形. 容易证明，这些等腰三角形是全等的. 再作正 n 边形各边的边心距，这些边心距又把这 n 个等腰三角形分成了 $2n$ 个直角三角形，这些直角三角形也是全等的.

定理　正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形.

由于这些直角三角形的斜边都是正 n 边形的半径 R，一条直角边是正 n 边形的边心距 r_n，另一条直角边是正 n 边形边长 a_n 的一半，一个锐角是正 n 边形中心角 α_n 的一半，即 $\frac{180^\circ}{n}$，所以，根据上面定理就可以把正 n 边形的有关计算归结为解直角三角形问题.

例 1 已知正六边形 $ABCDEF$ 的半径为 R，求这个正六边形的边长 a_6、周长 p_6 和面积 S_6.

解：作半径 OA、OB；作 $OG \perp AB$，垂足为 G，得 $\mathrm{Rt}\triangle OGB$（图 7-87）.

$$\because \quad \angle GOB = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ,$$

$$\therefore \quad a_6 = 2 \cdot R\sin 30^\circ = R.$$

$$\therefore \quad p_6 = 6 \cdot a_6 = 6R.$$

$$\because \quad r_6 = R\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

$$\therefore \quad S_6 = \frac{1}{2} r_6 \cdot a_6 \times 6$$

$$= \frac{1}{2} r_6 \cdot p_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot 6R = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2.$$

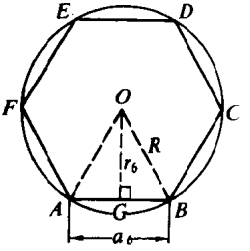


图 7-87

如果用 p_n 表示正 n 边形的周长，由例 1 可知，正 n 边形的面积 $S_n = \frac{1}{2} p_n r_n$.

练 习

1. （口答）(1) 正三角形被它的半径和边心距分成几个直角三角形？这些直角三角形为什么都是全等的？(2) 正五边形被它的半径和边心距分成的一些直角三角形中，以正五边形中心为顶点的锐角等于多少度？以正五边形的顶点为顶点的锐角等于多少度？
2. 已知圆的半径为 R，求它的内接正三角形、正方形的边长、边心距及面积.

例 2　在一种联合收割机上，拨禾轮的侧面是正五边形(图 7-88)，测得这个正五边形的边长是 48cm. 求它的半径 R_5 和边心距 r_5(精确到 0.1cm).

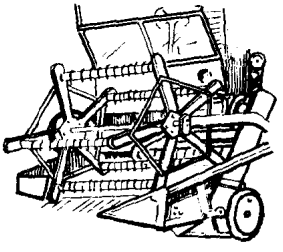


图　7-88

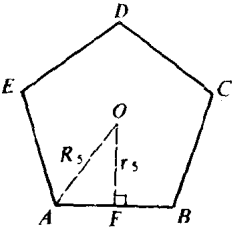


图　7-89

解：设正五边形为 $ABCDE$，它的中心为点 O(图 7-89).

连结 OA，作 $OF \perp AB$，垂足为 F，则 $OA = R_5$，$OF = r_5$，$\angle AOF = \dfrac{180°}{5} = 36°$.

$\because$　$AF = \dfrac{a_5}{2} = \dfrac{48}{2} = 24(\text{cm})$,

$\therefore$　$R_5 = \dfrac{24}{\sin 36°} = \dfrac{24}{0.5878} \approx 40.8(\text{cm})$.

$r_5 = 24\operatorname{ctg}36° = 24 \times 1.3764 \approx 33.0(\text{cm})$.

答：这个正五边形的半径约为 40.8cm，边心距约为 33.0cm.

例 3　已知：正十边形的半径为 R. 求证：它的边长 $a_{10} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)R$.

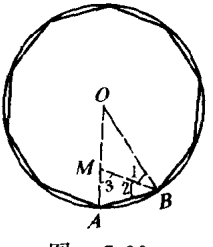


图　7-90

证明：如图 7-90，设 $AB = a_{10}$. 作 $\angle OBA$ 的平分线 BM，交 OA 于点 M，则

$$\left.\begin{array}{l}\angle AOB = \angle 1 = \angle 2 = 36^\circ \\ \angle OAB = \angle 3 = 72^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$OM = MB = AB = a_{10}.$$

$$\triangle OAB \backsim \triangle BAM \Rightarrow OA : AB = BA : AM,$$

即 $R : a_{10} = a_{10} : (R - a_{10})$，整理，得

$$a_{10}^2 + Ra_{10} - R^2 = 0.$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)R(\text{取正根}).$$

由例 3 的结论可得 $a_{10} \approx 0.618R$.

练　习

1. 一个正九边形的边长为 12cm，利用正切和余切表，计算这个正九边形的面积(精确到 0.1cm^2).

2. 完成下表中正多边形的计算(把计算结果填入表中)：

边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
n	a	a_n	R_n	a_n	r_n	p_n	S_n
3				$2\sqrt{3}$			
4					1		
6					$\sqrt{3}$		

7.18　画正多边形

由7.16节知道，要作半径为R的正n边形，只要把半径为R的圆n等分，然后顺次连结各分点即可.

1. 用量角器等分圆

由于在同圆中相等的圆心角所对的弧相等，因此作相等的圆心角可以等分圆. 在几何第一册中，我们就是用这种方法来作五角星的.

根据在同圆中相等的弦所对的弧相等，所以也可以像图7-91那样，在半径为R的圆中，先用量角器画一个等于$\frac{360^\circ}{n}$的圆心角，这个角所对的弧就是圆的$\frac{1}{n}$，然后在圆上依次截取这条弧的等弧，就得到圆的n等分点，从而作出半径为R的正n边形.

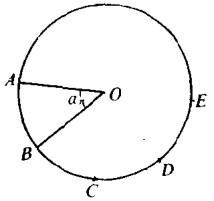


图　7-91

2. 用尺规等分圆

对于一些特殊的正n边形，还可以用圆规和直尺作出图形.

(1) 正四、八边形的作法

如图7-92，在$\odot O$中，用直尺和圆规作两条互相垂直的直径，就可以把$\odot O$分成4等分，从而作出正四边形. 再逐次平分各边所对的弧，就可以作出正八边形、正十六边形等边数逐次倍增的正多边形.

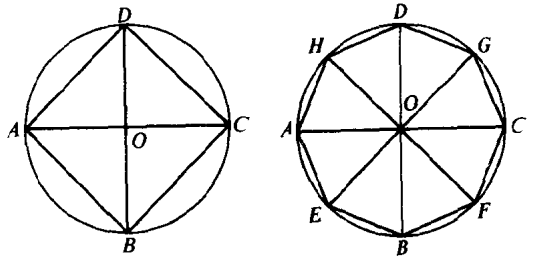


图 7-92

(2) 正六、三、十二边形的作法

因为正六边形的边长 $a_6 = R$，所以在半径为 R 的圆上依次截取等于 R 的弦，就可以 6 等分圆. 为了减少累积误差，通常像图 7-93 那样，画 $\odot O$ 的任意一条直径 AB，分别以 A、B 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径画弧，与 $\odot O$ 相交于 C、D 和 E、F，则 A、C、E、B、F、D 是 $\odot O$ 的 6 等分点. 显然 A、E、F(或 C、B、D) 是 $\odot O$ 的

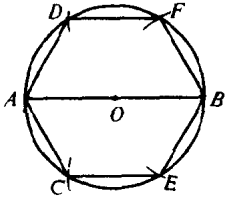


图 7-93

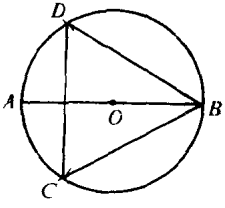


图 7-94

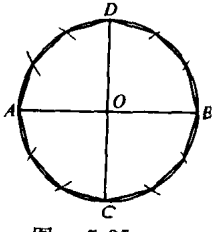


图 7-95

3 等分点. 所以 3 等分圆还可以像图 7-94 那样，以 A(或 B) 为圆心，以 OA 为半径画弧，与 $\odot O$ 相交于 C、D，则点 B、C、D 是 $\odot O$ 的 3 等分点.

像图 7-95 那样，以 $\odot O$ 的 4 等分点为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径，画 4 条弧与 $\odot O$ 相交，就可以把 $\odot O$ 分成 12 等分.

顺次连结圆的 6 等分点、3 等分点、12 等分点，就可以分别得到正六、正三、正十二边形.

在生产实践中，常常会遇到等分圆的问题. 例如，制造图 7-96 中的机器零件，就需要等分圆.

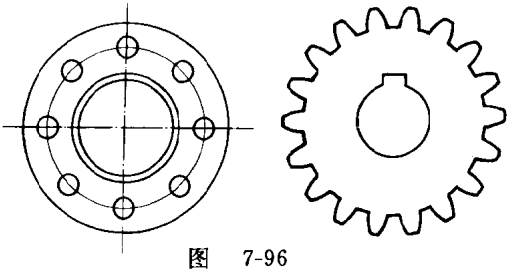
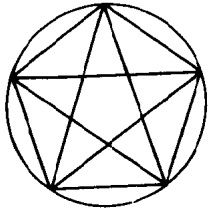


图 7-96

练 习

1. 用量角器画一个半径为 2cm 的正五边形，再作这个正五边形的各条对角线，画出如图所示的五角星.



（第 1 题）

2. 已知 $\odot O$ 和 $\odot O$ 上的一点 A.

   (1) 作 $\odot O$ 的内接正方形 $ABCD$ 和内接正六边形 $AEFCGH$；

   (2) 在(1)题所作的图中，如果点 E 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，证明 EB 是 $\odot O$ 内接正十二边形的一边.

例 1 有一个亭子(图 7-97),它的地基是半径为 4m 的正八边形.(1)用 1∶200 的比例尺画出地基平面图;(2)求地基的边长 a_8(精确到 0.01m)和面积 S_8(精确到 $0.1m^2$).

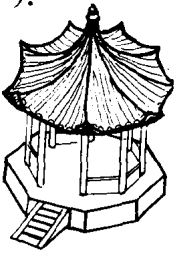


图 7-97

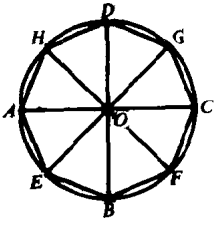


图 7-98

(1) **画法**:1. 以任意一点 O 为圆心,以 4m 的 $\frac{1}{200}$,即 2cm 为半径画 $\odot O$(图 7-98).

2. 作 $\odot O$ 的直径 AC、BD,使 $AC \perp BD$.

3. 作平分 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$ 的直径 EG、FH.

4. 顺次连结 AE、EB、BF、FC、CG、GD、DH、HA.

八边形 $AEBFCGDH$ 就是亭子地基的正八边形.

(2) **解**:$a_8 = 2R\sin\frac{180°}{8} = 2 \times 4 \times \sin 22°30'$

$= 8 \times 0.3827 \approx 3.06(m)$.

$r_8 = R\cos\frac{180°}{8} = 4 \times \cos 22°30'$

$= 4 \times 0.9239 \approx 3.70(m)$.

$S_8 = 8 \times \frac{1}{2} a_8 r_8 = 4 \times 3.06 \times 3.70 \approx 45.3(m^2)$.

答：这个亭子地基的边长约 3.06m，面积约为 45.3m².

我国民间相传有正五边形的近似画法，画法口诀是："九五顶五九，八五两边分"．它的意义如图 7-99 所示．

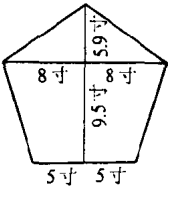


图 7-99

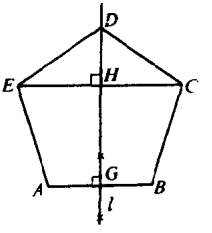


图 7-100

例 2 用民间相传画法口诀，画边长为 20mm 的正五边形．

画法：1. 画线段 AB，使 $AB = 20\text{mm}$（图 7-100）．

2. 作线段 AB 的垂直平分线 l，垂足为 G．

3. 在 l 上连续截取 GH、HD，使 $GH = \frac{9.5}{5} \times 10\text{mm} = 19\text{mm}$，$HD = \frac{5.9}{5} \times 10\text{mm} = 11.8\text{mm}$．

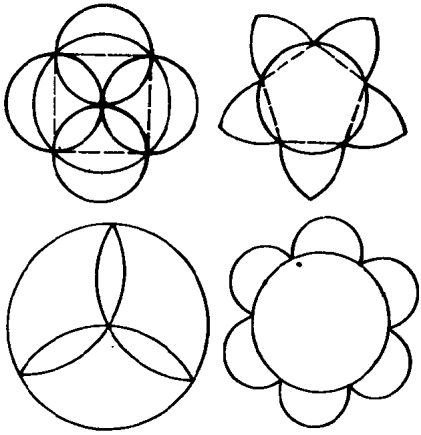
4. 过 H 作 $EC \perp DG$，在 EC 上截取 $HC = HE = \frac{8}{5} \times 10\text{mm} = 16\text{mm}$．

5. 连结 DE、EA、BC、CD．五边形 $ABCDE$ 就是边长为 20mm 的近似正五边形．

练　习

1. 仿照本节例2，画一个边长为30mm的正五边形.

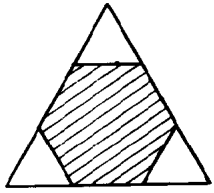
2. 用等分圆的方法画出下列图案：



（第2题）

想一想

如图，要把一个边长为 a 的正三角形剪成一个最大的正六边形，要剪去怎样的三个三角形？剪成的正六边形的边长是多少？它的面积与原三角形面积的比是多少？



习 题 7.6

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 怎样的多边形叫做正多边形？正多边形和圆有怎样的关系？

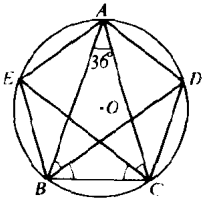
(2) 什么是正多边形的中心、半径、边心距、中心角？

(3) 正多边形的有关计算为什么可以归结为解直角三角形？

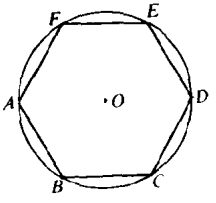
(4) 怎样用量角器等分圆？怎样用尺规作圆内接正方形、正六边形？怎样画近似的正五边形？

2. 求证：顺次连结正多边形各边中点所得的多边形是正多边形.

3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接等腰三角形，顶角 $\angle A=36°$，弦 BD、CE 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$. 求证：五边形 $AEBCD$ 是正五边形.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$. (1) 画以正六边形各顶点为切点的 $\odot O$ 的外切正六边形；(2) 求作：正六边形 $ABCDEF$ 的内切圆.

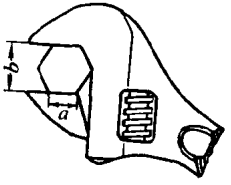
5. 求证：如果一个四边形有一个外接圆和一个内切圆，并且这两个圆是同心圆，那么这个四边形是正方形.

6. 计算下表中正 n 边形的中心角：

正 n 边形	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=8$	$n=9$
中心角 α_n						

7. 要用圆形铁片截出边长为 a 的正方形铁片，选用的圆铁片的直径最小要多长？

8. 如图，正六边形的螺帽的边长 $a=12\text{mm}$，这个搬手的开口 b 最小应是多少？



（第 8 题）

9. 设正三角形的边长为 a，求它的边心距、半径和高，并证明：边心距 ： 半径 ： 高 $=1:2:3$.

10. 在半径为 20cm 的圆中，利用正弦和余弦表，计算内接正九边形的边长、边心距、周长及面积(保留四个有效数字).

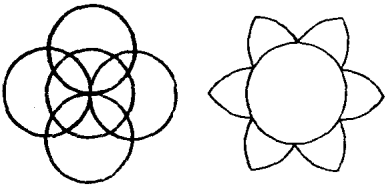
11. 求 $\odot O$ 的内接正六边形与外切正六边形边长的比、面积的比.

12. 一个圆形盖板的直径为 80mm，在它的一个同心圆上有 5 个直径为 10mm 的连接孔，每相邻两个孔心的距离为 29mm. 画出这个盖板的原大图形.

13. (1) 画一个半径为 2cm 的正九边形；

(2) 画一个边心距为 2cm 的正六边形.

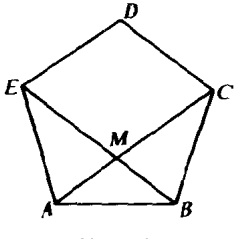
14. 用等分圆周的方法画出下列图案：



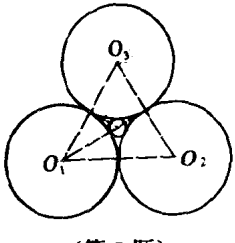
（第 14 题）

B 组

1. 已知圆内接正 n 边形的边长为 a. 求同圆外切正 n 边形的边长 b(用三角函数表示).
2. 已知:半径为 R 的圆内接正 n 边形的边长为 a_n. 求证:同圆内接正 $2n$ 边形的面积等于 $\frac{1}{2}nRa_n$. 利用这个结果,求半径为 R 的圆内接正八边形的面积(用代数式表示).
3. 求证:如果一个多边形有一个外接圆和一个内切圆,并且这两个圆是同心圆,那么这个多边形是正多边形.
4. 如图,正五边形的对角线 AC 和 BE 相交于点 M. 求证:(1)$ME = AB$;(2)$ME^2 = BE \cdot BM$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 设计三个直径相等的轧辊,使它们能够把直径为 0.4mm 的滚轴轧紧(如图). 求轧辊直径(精确到 0.01mm).

7.19 圆周长、弧长

1. 圆周长

我们知道，圆周长 C 与半径 R 之间有下面的关系：

$$C = 2\pi R.$$

这里 $\pi = 3.14159\cdots$，这个无限不循环小数叫做**圆周率**.

2. 弧长

因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C = 2\pi R$，所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}$，即 $\frac{\pi R}{180}$. 于是可得半径为 R 的圆中，$n°$ 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式：

$$l = \frac{n\pi R}{180}.$$

例 1 已知：如图 7-101，圆环的外圆周长 $C_1 = 250\text{cm}$，内圆周长 $C_2 = 150\text{cm}$. 求圆环的宽度 d（精确到 1mm）.

解：设外圆的半径为 R_1，内圆的半径为 R_2，则

$$d = R_1 - R_2.$$

$$\because \quad R_1 = \frac{250}{2\pi} = \frac{125}{\pi},$$

$$R_2 = \frac{150}{2\pi} = \frac{75}{\pi},$$

$$\therefore \quad d = \frac{125}{\pi} - \frac{75}{\pi} \approx 15.9(\text{cm}).$$

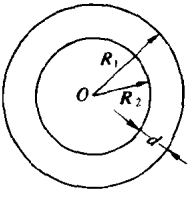


图 7-101

例 2 弯制管道时，先按中心线计算“展直长度”，再下料. 试计算图 7-102 所示管道的展直长度 L(单位：mm，精确到 1mm).

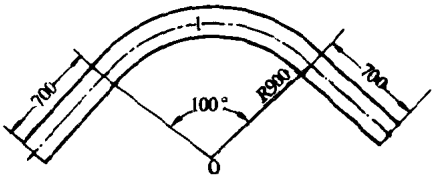


图 7-102

解：由弧长公式，得

$$l = \frac{100 \times 900 \times \pi}{180} = 500\pi \approx 1570(\text{mm}).$$

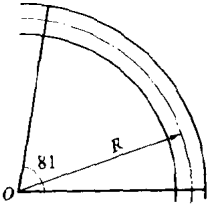
所要求的展直长度

$$L = 2 \times 700 + 1570 = 2970(\text{mm}).$$

答：管道的展直长度为 2970mm.

练　习

1. 已知正三角形的边长为6cm. 求它的内切圆和外接圆的周长.
2. 求证：同一个正多边形的内切圆与外接圆周长的比等于它的边心距与半径的比.
3. 已知圆的半径 $R = 46.0\text{cm}$，求 $18°31'$ 的圆心角所对的弧长 l(保留三个有效数字).
4. 有一段弯道是圆弧形的，道长是 12m，弧所对的圆心角是 81°. 求这段弧的半径 R. (精确到 0.1m.)



(第 4 题)

例3 如图 7-103，两个皮带轮的中心的距离为 2.1m，直径分别为 0.65m 和 0.24m.（1）求皮带长（保留三个有效数字）；（2）如果小轮每分转 750 转，求大轮每分约转多少转.

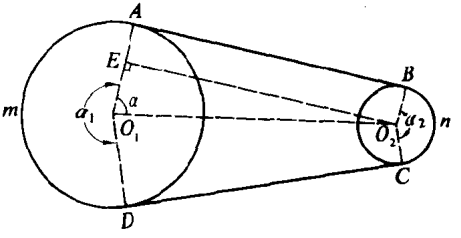


图 7-103

解：（1）作过切点的半径 O_1A、O_1D、O_2B、O_2C，作 $O_2E \perp O_1A$，垂足为 E.

$\because$ $O_1O_2 = 2.1$，$O_1A = \frac{1}{2} \times 0.65 = 0.325$，

$AE = O_2B = \frac{1}{2} \times 0.24 = 0.12$，

$\therefore$ $O_1E = O_1A - AE = 0.325 - 0.12 = 0.205$.

$\therefore$ $AB = O_2E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1E^2} \approx 2.090(\text{m})$.

$\because$ $\cos\alpha = \frac{O_1E}{O_1O_2} \approx 0.0976$，$\angle\alpha \approx 84.4°$，

$\therefore$ $\angle\alpha_1 = 360° - 2\angle\alpha = 191.2°$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AmD}$ 的长 $l_1 = \frac{191.2 \times \pi \times 0.325}{180}$

$\approx 1.085(\text{m})$.

$\because$ $\angle\alpha_2 = 2\angle\alpha = 168.8°$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{BnC}$ 的长 $l_2 = \dfrac{168.8 \times \pi \times 0.12}{180}$

$\approx 0.354(\text{m})$.

$\therefore$ 皮带长 $l = l_1 + l_2 + 2AB = 5.62(\text{m})$.

(2) 设大轮每分的转数为 n,则

$$n \cdot \pi \cdot 0.65 = 750 \cdot \pi \cdot 0.24,$$

$$n = \frac{750 \cdot \pi \cdot 0.24}{\pi \cdot 0.65} \approx 277(\text{转}).$$

答:皮带长约 5.62m,大轮每分约转 277 转.

练　习

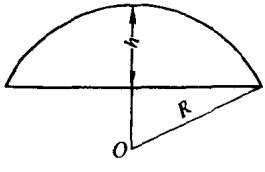
1. 填空:

(1) 如果 $\odot O$ 的周长为 C,那么它的半径 $R =$ ____;如果这个圆的半径增加 a,那么它的周长增加_____.

(2) 如果一条弧长等于 l,它的圆心角等于 $n°$,那么这条弧的半径 $R =$ _____;圆心角增加 1°,它的弧长增加_____.

2. 已知一条弧的半径 $R = 35\text{cm}$,弓形的高 $h = 20\text{cm}$. 求这条弧长(精确到 0.1cm).

3. 已知一条弧所对的弦长为 18cm,弦心距为 15cm. 求这条弧长(精确到 0.1cm).



(第 2 题)

7.20 圆、扇形、弓形的面积

1. 圆面积

我们知道，圆面积 S 和半径 R 之间有下面的关系：

$$S = \pi R^2.$$

2. 扇形面积

一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做**扇形**.

在半径为 R 的圆中，因为圆心角是 360° 的扇形面积就是圆面积 $S = \pi R^2$，所以圆心角是 1° 的扇形面积是 $\frac{\pi R^2}{360}$. 这样，在半径为 R 的圆中(图 7-104)，圆心角为 $n°$ 的扇形面积的计算公式是：

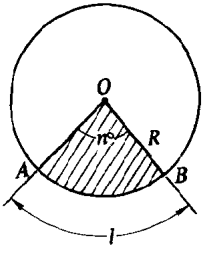


图 7-104

$$S_{扇形} = \frac{n}{360}\pi R^2.$$

又因为，扇形的弧长 $l = \frac{n\pi R}{180}$，扇形面积 $\frac{n\pi R^2}{360}$ 可以写成 $\frac{1}{2} \cdot \frac{n\pi R}{180} \cdot R$，所以，又得到

$$S_{扇形} = \frac{1}{2}lR.$$

例 1　已知正三角形的边长为 a，求它的内切圆与外接圆组成的圆环的面积(图 7-105).

解：设正三角形外接圆、内切圆的半径分别为 R、r，面积为 S_1、S_2.

$$S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$= \pi(R^2 - r^2).$$

$\because$ $R^2 - r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$,

$\therefore$ $S = \frac{\pi}{4}a^2$.

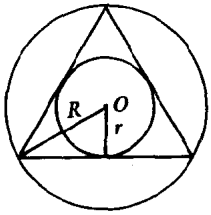


图　7-105

例 2　如图 7-106，已知正三角形 ABC 的边长为 a. 分别以 A、B、C 为圆心，以 $\frac{a}{2}$ 为半径的圆相切于点 O_1、O_2、O_3. 求 $\overset{\frown}{O_1O_2}$、$\overset{\frown}{O_2O_3}$、$\overset{\frown}{O_3O_1}$ 围成的图形面积 S(图中阴影部分).

解：$S = S_{\triangle ABC} - 3S_{\text{扇形}AO_1O_3}$.

$\because$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$S_{\text{扇形}AO_1O_3} = \frac{60\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{360} = \frac{\pi a^2}{24},$$

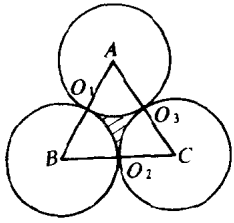


图　7-106

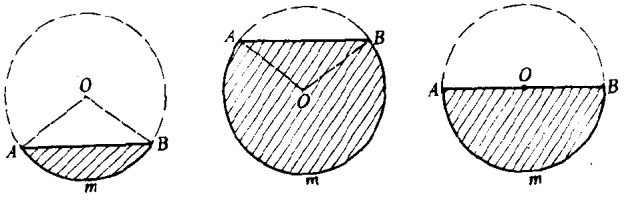
$\therefore$ $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{3\pi}{24}a^2 = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}a^2$.

练　习

1. 设圆周长为 C，圆面积为 S. 求证：$S=\dfrac{C^2}{4\pi}$.
2. 已知扇形的圆心角为 150°，弧长为 20πcm. 求扇形的面积.
3. 已知正六边形的半径为 R，求它的内切圆与外接圆组成的圆环的面积.
4. 求证：圆心角相等的两个扇形面积的比等于半径平方的比.

3. 弓形面积

从图 7-107 中可以看出，把扇形 $OAmB$ 的面积以及 $\triangle OAB$ 的面积计算出来，就可以得到弓形 AmB 的



(1)　　(2)　　(3)

图　7-107

面积. 如图(1)中，弓形 AmB 的面积小于半圆的面积，这时 $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{\triangle OAB}$；图(2)中，弓形 AmB 的面积大于半圆的面积，这时 $S_{弓形}=S_{扇形}+S_{\triangle OAB}$；图(3)中，弓形 AmB 的面积等于半圆的面积，这时 $S_{弓形}=\dfrac{1}{2}S_{圆}$.

例 3　水平放着的圆柱形排水管的截面半径是 0.6m，其中水面高是 0.3m. 求截面上有水的弓形的面积(精确到 0.01m^2).

解：如图 7-108，在 $\odot O$ 中，连结 OA、OB，作弦 AB 的垂直平分线，垂足为 D，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 C.

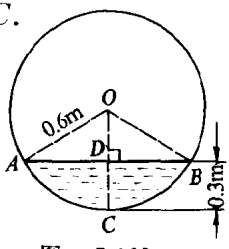


图 7-108

$\because$ $OA = 0.6, DC = 0.3,$

$\therefore$ $OD = 0.6 - 0.3 = 0.3,$

$\angle AOD = 60°,$

$AD = 0.3\sqrt{3}.$

$\because$ $S_{弓形ACB} = S_{扇形OACB} - S_{\triangle OAB},$

$$S_{扇形OACB} = \frac{120\pi}{360}(0.6)^2 = 0.12\pi(\text{m}^2),$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}AB \cdot OD = \frac{1}{2} \times 0.6\sqrt{3} \times 0.3$$

$$= 0.09\sqrt{3}(\text{m}^2).$$

$\therefore$ $S_{弓形ACB} = 0.12\pi - 0.09\ \sqrt{3} \approx 0.22(\text{m}^2).$

答：截面上有水的弓形面积约为 0.22m^2.

例 4 已知：如图 7-109，$\odot O$ 的半径为 R，直径 $AB \perp CD$，以 B 为圆心，以 BC 为半径作 $\overset{\frown}{CED}$. 求：$\overset{\frown}{CED}$ 与 $\overset{\frown}{CAD}$ 围成的新月形 $ACED$ 的面积 S.

解：$\because$ $S = \frac{1}{2}\pi R^2 - S_{弓形CED},$

又 $\because$ $S_{弓形CED} = S_{扇形BCED} - S_{\triangle BCD},$

$$S_{扇形BCED} = \frac{90\pi(BC)^2}{360}$$

$$= \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}R)^2 = \frac{\pi R^2}{2},$$

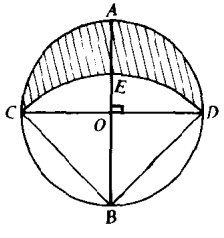


图 7-109

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2R \cdot R = R^2,$$

$$\therefore \quad S = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} + R^2 = R^2.$$

练　习

1. 填空：

(1) 如果弓形的弧所对的圆心角为 60°，弓形的弦长为 a，那么这个弓形的面积等于_____；

(2) 如果弓形的弧所对的圆心角为 300°，弓形的弦长为 a，那么这个弓形的面积等于_____.

2. 在本节的例 3 中，设水面高为 0.4m，其他条件不变，利用三角函数解同样的问题.

例 5　已知 $\odot O$ 的半径为 R(图 7-110).

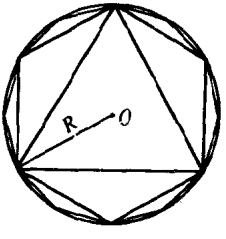


图　7-110

(1) 求 $\odot O$ 的内接正三角形、正六边形、正十二边形的周长与 $\odot O$ 直径($2R$) 的比值；

(2) 求 $\odot O$ 的内接正三角形、正六边形、正十二边形的面积与圆面积的比值(保留两位小数).

解：(1)∵ $p_3 = 3a_3 = 3 \times 2R\sin\dfrac{180°}{3} = 3\sqrt{3}R$，

$p_6 = 6a_6 = 6R$，$p_{12} = 12a_{12} = 12 \times 2R\sin\dfrac{180°}{12} \approx 6.21R$，

$\therefore \quad \dfrac{p_3}{2R} = \dfrac{3\sqrt{3}R}{2R} \approx 2.60$，$\dfrac{p_6}{2R} = \dfrac{6R}{2R} = 3.00$，

$\dfrac{p_{12}}{2R} = \dfrac{6.21R}{2R} \approx 3.11$.

(2)∵ $S_3 = \dfrac{1}{2}p_3r_3 = \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{3}R \cdot R\cos\dfrac{180°}{3}$

$\approx 1.30R^2$，

$S_6 = \dfrac{1}{2}p_6r_6 = \dfrac{1}{2} \times 6R \cdot R\cos\dfrac{180°}{6} \approx 2.60R^2$，

$S_{12} = \dfrac{1}{2}p_{12}r_{12} = \dfrac{6.21}{2}R \cdot R\cos\dfrac{180°}{12} \approx 3.00R^2$，

$\therefore \quad \dfrac{S_3}{\pi R^2} = \dfrac{1.30R^2}{\pi R^2} \approx 0.41$，

$\dfrac{S_6}{\pi R^2} = \dfrac{2.60R^2}{\pi R^2} \approx 0.83$，

$\dfrac{S_{12}}{\pi R^2} = \dfrac{3.00R^2}{\pi R^2} \approx 0.96$.

从例 5(1) 可以看出：正多边形的周长与它的外接圆直径的比值，与直径的大小无关. 实际上，古代数学家就是用逐次倍增正多边形的边数，使 正多边形的周长趋近于圆的周长，从而求得了 π 的各种近似值. 从(2) 可以看出，增加圆内接正多边形的边数，可使它的面积趋近于圆的面积.

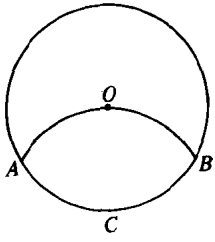
练　习

1. 填空：

(1) 在 ⊙O 中，同时作它的内接正三角形、正方形、正五边形、正六边形、正九边形，其中边长最大的是正____形，边心距最大的是正_____形，周长最大的是正____形，面积最大的是正____形.

(2) 如果 ⊙O 的面积是 ⊙A 的面积的一半，那么 ⊙O 的半径是 ⊙A 的半径的_____倍，如果 ⊙O 的半径是 ⊙A 的半径的一半，那么 ⊙O 的面积是 ⊙A 的面积的_____倍.

2. 如图，已知 ⊙O 的半径为 R，以 ⊙O 上任意一点 C 为圆心，以 R 为半径作弧与 ⊙O 相交于 A、B. 求 $\overset{\frown}{AOB}$ 与 $\overset{\frown}{BCA}$ 围成的图形面积.

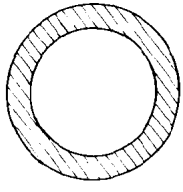


（第 2 题）

3. 已知 ⊙O 的半径为 R，以 O 为圆心的小圆，把已知 ⊙O 的面积分成相等的两部分，求小圆的半径.

想一想

一种圆管的横截面是同心圆的圆环面. 用刻度尺，只测量圆管横截面的哪一条弦的大小，就可以算出截面的面积？



习 题 7.7

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

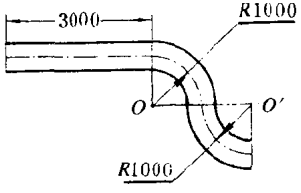
(1) 计算圆周长、弧长的公式是什么？它们之间有什么关系？

(2) 计算圆面积、扇形面积的公式各是什么？它们之间有什么关系？

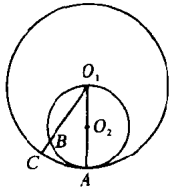
(3) 怎样计算大于半圆的弓形面积？怎样计算小于半圆的弓形面积？

2. 火车机车上的主动轮直径为 1.2 米，主动轮每分转 400 转，火车每小时行几公里(精确到 1 公里)？

3. 如图，已知 $\angle O = \angle O' = 90°$，中心线的两条圆弧半径都为 1000mm. 求图中管道的展直长度(精确到 1mm).



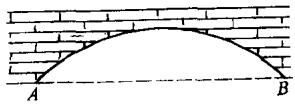
(第 3 题)



(第 4 题)

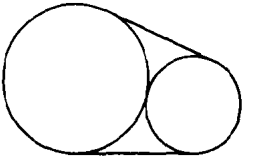
4. 如图，大圆 O_1 的半径 O_1A 是小圆 O_2 的直径，$\odot O_1$ 的半径 O_1C 交 $\odot O_2$ 于点 B. 求证：$\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AC}$ 的长相等.

5. 有一圆弧形桥拱，拱的跨度 $AB = 40$m，拱形的半径 $R = 29$m. 求拱形的高和拱形的弧长(保留四个有效数字).

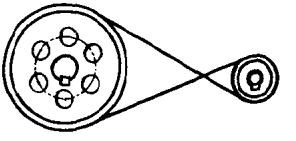


(第 5 题)

6. 为了把半径为 20cm 和 12cm 的两根圆柱紧紧地捆在一起，绕它们的横截面捆一圈需要多长的铝丝(精确到 1cm)？



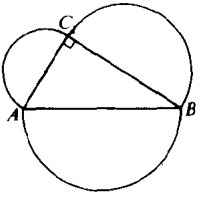
(第 6 题)



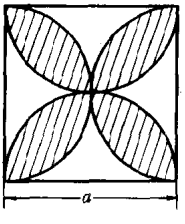
(第 7 题)

7. 如图，两个皮带轮的中心距离为 2.1m，它们的直径分别为 0.65m 和 0.24m. (1) 求皮带长(保留三个有效数字)；(2) 如果小轮每分转 750 转，求大轮每分约转多少转.

8. 已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$. 求证：以 AB 为直径的半圆面积等于以 AC、BC 为直径的两个半圆面积的和.



(第 8 题)

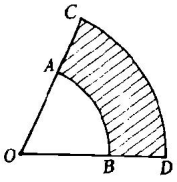


(第 9 题)

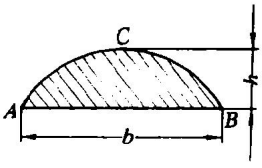
9. 正方形的边长为 a，以各边为直径在正方形内画半圆. 求所围成的图形(阴影部分)的面积.

10. 一个扇形的半径等于一个圆的半径的 2 倍，且面积相等. 求这个扇形的圆心角.

11. 如图，两个同心圆被两条半径截得的 $\overset{\frown}{AB} = 6\pi\text{cm}$，$\overset{\frown}{CD} = 10\pi\text{cm}$，又 $AC = 12\text{cm}$. 求阴影部分 $ABDC$ 的面积.



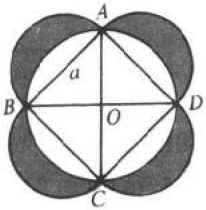
（第 11 题）



（第 12 题）

12. 已知：如图，$b = 4.8\text{cm}$，$h = 1.2\text{cm}$. 求弓形 ACB 的面积（保留两个有效数字）.

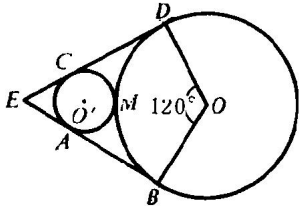
13. 如图，已知边长为 a 的正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，分别以正方形的各边为直径向正方形外作半圆. 求四个半圆与 $\odot O$ 的四条弧围成的四个新月形的面积.



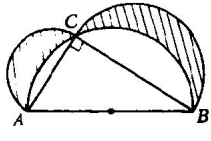
（第 13 题）

B 组

1. 已知：如图，$\odot O$ 与 $\odot O'$ 相切于点 M，它们的外公切线 AB、CD 相交于点 E. 如果 $\angle BOD = 120°$，求证：$\odot O'$ 的周长等于 $\overset{\frown}{BMD}$ 的弧长.



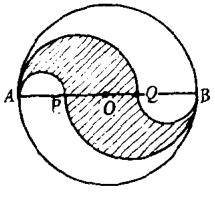
（第 1 题）



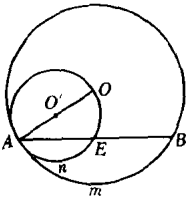
（第 2 题）

2. 求证：如图，以直角三角形各边为直径的三个半圆围成的两个新月形（阴影部分）的面积和，等于直角三角形的面积.

3. 已知：如图，在 $\odot O$ 的直径 AB 上任意取两点 P、Q，分别以 AP、AQ 为直径在 AB 的同一侧画半圆，以 BQ、BP 为直径在 AB 的另一侧画半圆. 求证：阴影部分的面积与 $\odot O$ 面积的比等于 $PQ : AB$.



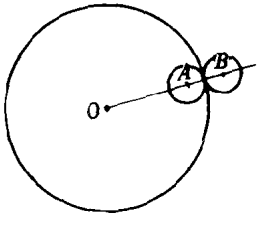
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，以半径 OA 为直径的 $\odot O'$ 与弦 AB 相交于点 E. 求证：弓形 AmB 与弓形 AnE 面积的比为 4 : 1.

想一想



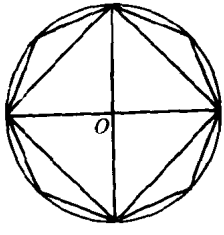
如图，如果 $\odot O$ 的周长为 20πcm，$\odot A$、$\odot B$ 的周长都是 4πcm，$\odot A$ 在 $\odot O$ 内沿 $\odot O$ 滚动，$\odot B$ 在 $\odot O$ 外沿 $\odot O$ 滚动. $\odot B$ 转动 6 周回到原来位置，而 $\odot A$ 只需转动 4 周就回到原来位置. 想一想为什么？

读一读

关于圆周率 π

我们知道，圆的周长 $C = 2\pi R$. 但是，你知道公式中的 π 值是怎样算出来的吗？

实际上，$\pi = \dfrac{C}{2R}$，式中圆的周长 C 是可以用圆内接正多边形的周长 p_n 来近似代替的. 如图，当圆内接正 n 边形的边数不断地成倍增大时，它的周长 p_n 就不断地增大，就会越来越接近于圆的周长 C，于是 $\dfrac{p_n}{2R}$ 的值就越来越接近 $\dfrac{C}{2R}$ 的值.



如果半径为 R 的圆内接正 n 边形的边长为 a_n，可以求得它的内接正 $2n$ 边形的边长

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

这个公式叫倍边公式，利用它就可以算出半径为 R 的圆内接正 $2n$、$4n$、$8n$、… 边形的边长，进而可计算 $\dfrac{p_{2n}}{2R}$、$\dfrac{p_{4n}}{2R}$、$\dfrac{p_{8n}}{2R}$、…，这些值就越来越接近于圆的周长与直径的比值 $\left(\dfrac{C}{2R}\right)$，这个数就是圆周率 π. π 的精确值是一个无限不循环小数，就是说，π 是一个无理数. $\pi = 3.141592653589793\cdots$，应用时可根据实际需要，取 π 的近似值.

我国古代数学家刘徽，在公元三世纪用“割圆术”求得 π 的近似值为 $\dfrac{157}{50} = 3.14$，祖冲之在公元五世纪又进一步求得 π 的值在 3.1415926 与 3.1415927 之间，是当时世界上最先进的成就. 现代利用电子计算机，已有人把 π 的值算到小数点后几十万位.

下表是从圆内接正六边形开始，逐步计算所得的结果.

边数 n	边长 a_n	周长 p_n	周长与直径的比 $\frac{p_n}{2R}$
6	$1.00000000R$	$6.00000000R$	3.00000000
12	$0.51763809R$	$6.21165708R$	3.10582854
24	$0.26105238R$	$6.26525722R$	3.13262861
48	$0.13080626R$	$6.27870041R$	3.13935021
96	$0.06543817R$	$6.28206396R$	3.14103198
192	$0.03272346R$	$6.28290510R$	3.14145255
384	$0.01636228R$	$6.28311544R$	3.14155772
768	$0.00818121R$	$6.28316941R$	3.14158471

由于 $\frac{C}{2R}=\pi$，所以 $C=2\pi R$.

另外，根据正 n 边形的面积 $S_n=\frac{1}{2}r_n p_n$，当边数 n 无限增大时，r_n 趋近于 R，p_n 趋近于 C，所以圆的面积

$$S=\frac{1}{2}RC=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2.$$

想一想

用同样长的铁丝分别弯制成正三角形、正方形、正五边形、正六边形和圆. 想一想，其中哪一种形状所围成的面积最大？

7.21 圆柱和圆锥的侧面展开图

1. 圆柱的侧面展开图

在生活中，我们常常遇到圆柱形的物体，如图7-111中的油桶、铅笔、圆形柱子等.

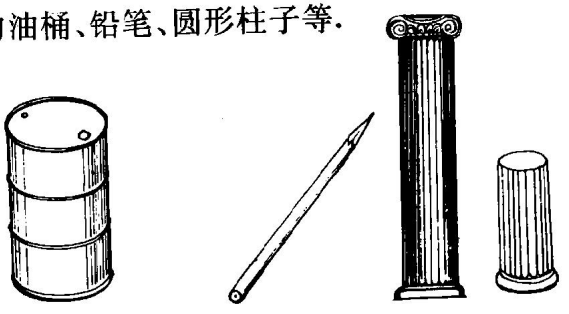


图 7-111

在小学我们已经知道，圆柱是由两个圆的底面和一个侧面围成的. 底面是两个等圆，侧面是一个曲面. 两个底面之间的距离是圆柱的高.

圆柱也可以看作是由一个矩形旋转得到的. 如图7-112，把矩形 $ABCD$ 绕直线 AB 旋转一周得到的图形是一个圆柱. 旋转轴 AB 叫做圆柱的轴，圆柱侧面上平行于轴的线段 CD、C_1D_1、C_2D_2、…… 都叫做圆柱的母线.

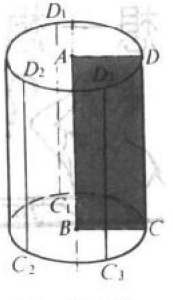


图 7-112

容易看出，圆柱的轴通过上、下底面的圆心，圆柱的母线长都相等，并等于圆柱的高，圆柱的两个底面是平行的.

如图 7-113，如果把圆柱的侧面沿它的一条母线剪开，展在一个平面上，侧面的展开图是矩形. 这个矩形的一边长等于圆柱的高，即圆柱的母线长，另一边长是底面圆的周长，所以圆柱的侧面积等于底面圆的周长乘以圆柱的高.

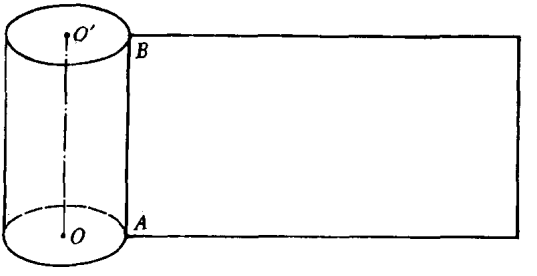


图　7-113

例 1　如图 7-114(1)，把一个圆柱形木块沿它的轴剖开，得矩形 $ABCD$. 已知 $AD = 18\text{cm}$，$AB = 30\text{cm}$，求这个圆柱形木块的表面积(精确到 1cm^2).

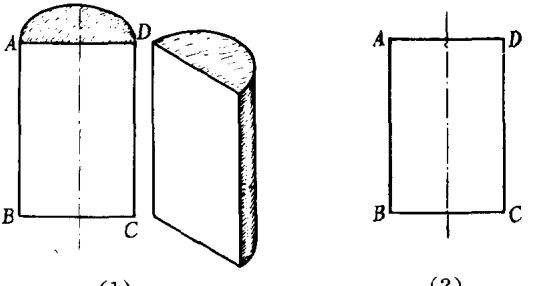


图　7-114

解：如图 7-114(2)，AD 是圆柱底面的直径，AB 是圆柱的母线. 设圆柱的表面积为 S，则

$$S = 2S_{\text{圆}} + S_{\text{侧}}.$$

$$\therefore \quad S = 2\pi(\frac{18}{2})^2 + 2\pi \times \frac{18}{2} \times 30$$

$$= 162\pi + 540\pi \approx 2204(\text{cm}^2).$$

答：这个圆柱形木块的表面积约为 2204cm^2.

例 2 用一张面积为 900cm^2 的正方形硬纸片围成一个圆柱的侧面. 求这个圆柱的底面直径(精确到 0.1cm).

分析：依题意，正方形的边长即圆柱底面的周长，所以应先求出正方形边长.

解：设正方形边长为 x，圆柱底面直径为 d，则

$$x = \sqrt{900} = 30.$$

依题意可得 $\pi d = 30$，

$$\therefore \quad d = \frac{30}{\pi} \approx 9.6(\text{cm}).$$

答：这个圆柱的底面的直径约为 9.6cm.

练　习

1. 用同一张矩形纸片围成圆柱的侧面，能得到不同的圆柱吗？

2. 已知矩形 $ABCD$ 的一边 $AB = 5\text{cm}$，另一边 $AD = 2\text{cm}$. 求：

(1) 以直线 AB 为轴旋转一周，所得到的圆柱的表面积；

(2) 以直线 AD 为轴旋转一周所得到的圆柱的表面积.

2. 圆锥的侧面展开图

在生活中，我们也会遇到一些圆锥形的物体，如图7-115中的铅锤、粮堆、烟囱帽等，想一想，你还可以举出一些圆锥形物体的实例吗？

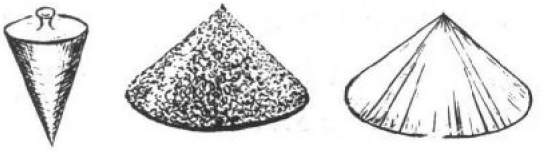


图 7-115

在小学我们已知道，圆锥是由一个底面和一个侧面围成的，如图7-116，圆锥的底面是一个圆，侧面是一个曲面，从圆锥的顶点到底面圆的距离是圆锥的高 h.

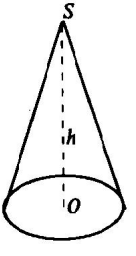


图 7-116

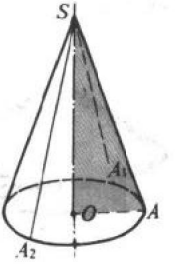


图 7-117

圆锥也可以看作是由一个直角三角形旋转得到的. 如图 7-117，把 Rt$\triangle OAS$ 绕直线 SO 旋转一周得到的图形就是圆锥. 旋转轴 SO 叫做圆锥的轴，圆锥的轴通过底面圆的圆心，并且垂直于底面.

如图 7-117，连结圆锥的顶点和底面圆上任意一点的线段 SA、SA_1、…… 都叫做圆锥的母线，圆锥的母线长都相等.

如果把一个圆锥的侧面沿它的一条母线剪开，展在一个平面上，那么它的展开图是一个扇形(图 7-118)，这个扇形的半径是圆锥的母线长 SA，弧长是圆锥底面圆的周长. 如果底面圆的半径为 r，则圆锥侧面展开扇形的弧长为 $l = 2\pi r$.

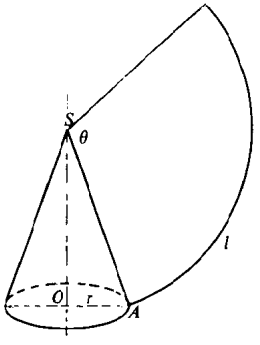
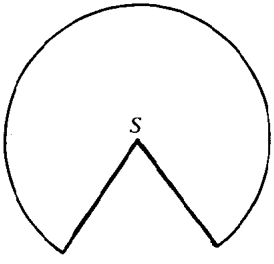


图 7-118

知道扇形的半径和弧长，就可以求得扇形的圆心角和扇形的面积.

(1)



(2)

图 7-119

例 3 如图 7-119(1)，圆锥形的烟囱帽的底面直径是 80cm，母线长 50cm. (1) 画出它的展开图；(2) 计算这个展开图的圆心角及面积.

解：(1) 烟囱帽的展开图是扇形，这个扇形的半径是圆锥的母线长，弧长是圆锥底面圆的周长(如图 7-119(2)).

(2) 设扇形的半径为 R，弧长为 l，圆心角为 α，则 $R = 50\text{cm}$，$l = 80\pi\text{cm}$.

$$\because \quad l = \frac{\alpha\pi R}{180},$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{180 \times 80\pi}{50\pi} = 288(\text{度}).$$

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} \times 50 \times 80\pi \approx 6280(\text{cm}^2).$$

例 4 图 7-120 是一个圆锥形的零件，经过轴的剖面是一个等腰三角形(图 7-121)，它的腰长等于圆锥的母线长，底边长等于圆锥底面的直径. 按图中标明的尺寸(单位 mm)，求：

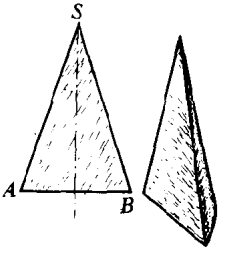


图 7-120

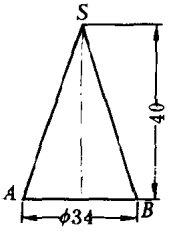


图 7-121

(1) 圆锥形零件的母线长 l；

(2) 锥角(即等腰三角形的顶角)α；

(3) 零件的表面积.

(长度精确到 0.1mm，面积精确到 $10mm^2$，角度精确到 $1'$).

解：设圆锥的高为 h，底面半径为 r，表面积为 S.

(1) 由勾股定理，得

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{40^2 + 17^2} \approx 43.5(mm).$$

(2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{h} = \frac{17}{40} = 0.425$,

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{2} \approx 23°2'.$$

$$\therefore \quad \alpha \approx 46°4'.$$

(3) $S = S_{底} + S_{侧}$

$$= \pi \times 17^2 + \frac{1}{2} \times 43.5 \times 2 \times \pi \times 17$$

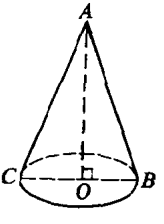
$$\approx 3230(mm^2).$$

答：这个零件的母线长约为 43.5mm，锥角约为 $46°4'$，表面积约为 $3230mm^2$.

练　习

1. 已知圆锥的底面直径为 80cm，母线长 90cm，求它的侧面展开图的圆心角和表面积.

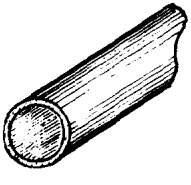
2. 已知：如图，圆锥的母线长 $AB = 6cm$，底面半径 $OB = 2cm$. 求：(1) 圆锥的高 AO；(2) 锥角 $\angle CAB$.



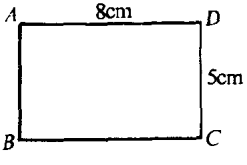
(第 2 题)

习　题 7.8

1. 阅读课文，思考下列问题：
   (1) 圆柱是由一些什么样的面围成的？它还可以看作是由什么样的平面图形旋转得到的？
   (2) 圆柱的侧面展开图是什么样的平面图形？
   (3) 怎样求圆柱的表面积？
   (4) 圆锥是由一些什么样的面围成的？它还可以看作是由什么样的平面图形旋转得到的？
   (5) 圆锥的侧面展开图是什么样的平面图形？
   (6) 怎样求圆锥的表面积？
2. 一个圆柱的侧面积为 256cm^2，高为 20cm. 如果把它的底面半径变为原来的 2 倍，高不变，那么它的侧面积变为多少？变化前后的半径各是多少？
3. 如图，圆管长 2m，内、外壁的直径分别为 10cm 和 12cm. 现需把它的全部表面涂上防腐材料，问总计要涂多少平方米？(精确到 0.01m^2)



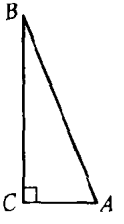
(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的边 $AB = 5\text{cm}$，$AD = 8\text{cm}$. 分别以直线 AB、AD 为轴旋转一周得两个不同的圆柱. 哪个的表面积大？

5. 如图，已知 Rt△ABC 的斜边 $AB = 13$cm，一条直角边 $AC = 5$cm. 以直线 AB 为轴旋转一周得一个几何体. 求这个几何体的表面积.

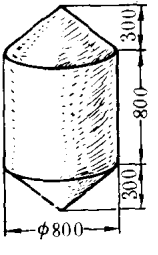


（第 5 题）

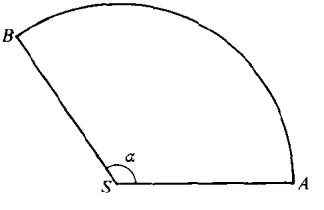
（第 6 题）

6. 如图，粮仓的顶部是圆锥形，这个圆锥底面周长为 32m，母线长 7m. 为防雨需在粮仓顶部铺上油毡，需用油毡多少？

7. 锚标浮筒是打捞作业中用来标记锚或沉船位置的. 它的上、下两部分是圆锥，中间是一个圆柱（如图）. 按图中标出的尺寸，计算它的表面积（单位 mm，精确到 100mm²）.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 一个扇形如图，半径为 30cm，圆心角为 120°，用它做成一个圆锥的侧面. 求圆锥底面半径和锥角.

小结与复习

一、内容提要

本章研究圆的有关知识.主要内容有:圆的概念和性质,圆与点、圆与直线、圆与圆、圆与角以及圆与三角形、四边形、正多边形的位置关系和它们的应用.

(一)圆的概念和性质

1.圆是与定点的距离等于定长的点的集合.圆的位置及大小是由圆心的位置和半径的大小决定的,由此可以推出,经过不在同一直线上的三点可以确定一个圆.*点的轨迹.*反证法.

2.圆的性质

圆是轴对称图形,它的任意一条直径所在的直线都是对称轴.由此可以推出垂径定理等圆的重要性质.

圆是中心对称图形,并且绕圆心旋转任意大小的角度,都能够与原图形重合.由此可以推出同圆或等圆中,两个圆心角、圆心角所对的弧、弦、弦心距的相等关系.

(二)圆与点、圆与直线、圆与圆的位置关系

1.点在圆外 $\Leftrightarrow d > r$;

点在圆上 $\Leftrightarrow d = r$;

点在圆内 $\Leftrightarrow d < r$.

2. 直线与圆相离 $\Leftrightarrow d > r$;

直线与圆相切 $\Leftrightarrow d = r$;

直线与圆相交 $\Leftrightarrow d < r$.

圆的切线垂直于过切点的半径，它的逆命题也成立.

3. 两圆外离 $\Leftrightarrow d > R + r$;

两圆相切 $\Leftrightarrow d = R + r$ 或 $d = R - r$;

两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$;

两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$.

两圆相交时，连心线垂直平分公共弦. 两圆的外（内）公切线长相等.

（三）与圆有关的角

圆心角：顶点在圆心，圆心角与它所对的弧的度数相等.

圆周角：顶点在圆上，圆周角等于同弧上圆心角的一半.

*弦切角：顶点在圆上，一边与圆相切.

（四）圆与三角形、四边形、正多边形的关系

1. 三角形有且只有一个外接圆和一个内切圆，它们的圆心分别叫做三角形的外心和内心.

2. 圆的内接四边形对角互补，外角等于其内对角.

3. 正多边形必有外接圆和内切圆，利用正多边形与圆的关系，可以求得圆的周长和面积公式，进而可以得到弧长和扇形面积公式.

4. 圆柱的侧面展开图是矩形，圆锥的侧面展开图是扇形，利用圆的有关计算公式，可以计算圆柱、圆锥的表面积.

*(五) 与圆有关的几个定理

切线长定理. 弦切角定理. 相交弦定理. 切割线定理.

二、学习要求

1. 理解圆及有关概念，掌握点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系. 掌握切线的概念，两圆公切线的概念.

理解正多边形及有关概念，掌握三角形内心、外心的概念.

2. 理解圆的轴对称性和中心对称性. 掌握垂径定理及推论，圆心角、它所对的弧、弦之间关系的定理. 掌握圆周角定理及推论，圆内接四边形性质定理及推论.

掌握圆的切线的判定定理和性质定理.

掌握相交两圆连心线的性质.

能用学过的这些定理进行简单的论证和计算.

3. 能将正多边形边长、半径、边心距和中心角的有关计算问题转变为解直角三角形的问题来解决. 能利用圆的周长、面积、弧长、扇形面积的公式解决一些简单的计算问题.

了解圆柱、圆锥的侧面展开图分别是矩形和扇形，会计算圆柱和圆锥的侧面积和全面积.

4. 会用尺规经过不在同一条直线上的三点作圆，作两条线段的比例中项. 会用各种工具画圆的切线、两圆的公切线，并能进一步画直线与圆弧、圆弧与圆弧的连接. 会等分圆周，并能用等分圆周的方法画出圆内接正多边形. 会用尺规作圆内接正四边形、正六边形. 会用近似法画正五边形.

*5. 了解轨迹的概念和几个简单轨迹. 了解反证法.

掌握切线长定理、弦切角定理、相交弦定理、切割线定理，并会利用它们进行有关的证明和计算.

6. 通过圆与各种图形位置关系的学习，认识事物之间是相互联系的，通过运动和变化，事物之间可以互相转化.

通过这一章的学习，进一步提高综合运用知识的能力和解决实际问题的能力.

三、需要注意的几个问题

1. 圆是一个很特殊的对称图形，它的许多性质都可以由它的对称性推出. 不仅如此，圆的切线长相等、公切线长相等、相交两圆连心线的性质等，也可以利用圆的对称性推出. 所以在学习和复习“圆”这一章时，要注意充分利用圆的对称性.

2. “圆”是初中几何的最后一章，在这一章里经常涉及到前面学过的内容，因此在学习和复习本章内容时，要注意复习前面的有关知识，并且注意发现以前学习的漏洞，及时补救，同时注意知识的综合运用.

3. 到目前为止，我们已掌握了较系统的平面几何的知识，这就为运用这些知识解决实际问题奠定了基础. 在这一章的学习过程中，要注意学习如何运用学过的知识解决实际问题，特别要学习怎样从实际问题中抽象出数学问题. 这一章中还有一些需要动手操作的内容，这对于今后的工作和学习都是十分有用的，希望不要忽视它们.

复习题七

A 组

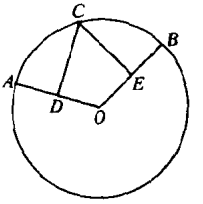
1. 圆的弦与直径相交成 30° 角，并且分直径为 8cm 和 2cm 两部分，求弦心距.

2. 半径为 r 的圆的弦长为 l，弦心距为 d，弓形高为 h.

   (1) 用 r 和 d 表示 l^2；

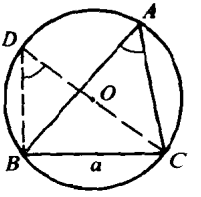
   (2) 用 r 和 h 表示 l^2.

3. 以等边三角形的一边为直径作圆. 求证：这圆平分其他两边，其他两边三等分半圆.



（第 4 题）

4. 已知：如图，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$，$D$、$E$ 分别是半径 OA 和 OB 的中点. 求证：$DC = CE$.



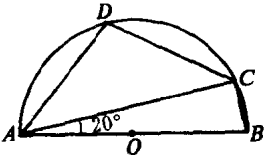
（第 5 题）

5. 在锐角三角形 ABC 中，$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$，外接圆半径为 R. 求证：$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

6. $\triangle ABC$ 中，$BC = 2.4\text{cm}$，$\angle A = 31°$，利用三角函数计算 $\triangle ABC$ 的外接圆直径(精确到 0.1cm).

7. 已知圆内接梯形的一个底边是圆的直径，两条对角线相交所成的锐角为 60°. 求梯形各角的度数.

8. 已知：如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，C、D 是 $\odot O$ 上的点，$\angle BAC = 20°$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$. 求四边形 $ABCD$ 各角的度数.



（第 8 题）

*9. 以直角三角形 ABC 的直角边 AC 为直径作圆，交斜边 AB 于点 D，过点 D 作圆的切线. 求证：这条切线平分另一条直角边 BC.

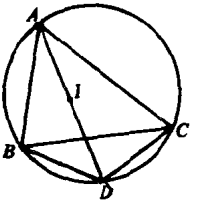
*10. 从 $\odot O$ 外的定点 P 作 $\odot O$ 的两条切线，分别切 $\odot O$ 于点 A 和 B. 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点 C，经过点 C 作 $\odot O$ 的切线，分别交 PA、PB 于点 D 和 E. 求证：

(1) $\triangle PDE$ 的周长是定值 $(PA + PB)$；

(2) $\angle DOE$ 的大小是定值 $(\frac{1}{2}\angle AOB)$.

11. A 是 $\odot O$ 的直径上的一点，OB 是和这条直径垂直的半径，BA 和 $\odot O$ 相交于另一点 C，过点 C 的切线和 OA 的延长线相交于点 D. 求证：$DA = DC$.

12. 已知：如图，点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，延长 AI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D. 求证：$DB = DI = CD$.



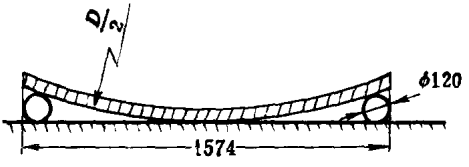
（第 12 题）

*13. 两弦相交，一条弦被分为 2cm 和 12cm，另一条弦被分为 2∶3. 求两条弦长.

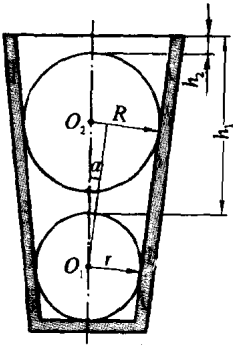
*14. 从圆外一点 P 向圆引切线 PA 和割线 PBC，已知割线在圆内的部分与切线长相等，圆外部分等于 2cm. 求切线长.

15. 两圆相交于点A和B，经过交点B的任意一直线和两圆分别相交于点C和D. 求证：AC与AD的比等于两圆直径的比.

16. 如图，用直径为120mm的两根圆钢棒嵌在大型工件的两侧，测量大的圆形工件的直径. 已量得两圆钢棒外侧距离为1574mm，求工件的直径D(精确到1mm).



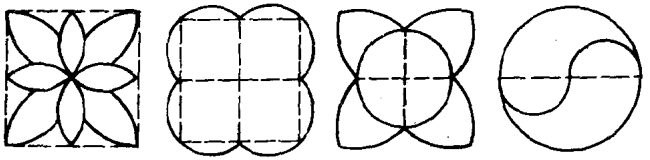
(第16题)



(第17题)

17. 如图，用钢珠测量工件锥孔的斜角α时，先把直径20mm的小钢珠放在锥孔内，用深度卡尺测得深度$h_1 = 50$mm，再放入直径为26mm的大钢珠，量得深度$h_2 = 4$mm. 求$\angle\alpha$的度数(精确到0.1°).

18. 画出图中由圆和弧所组成的图案.



(第18题)

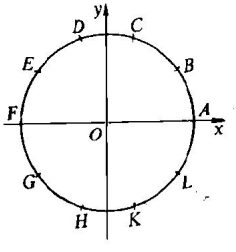
19. 求证：正五边形的一条对角线把它分成一个等腰三角形和一个等腰梯形.

20. 填空：

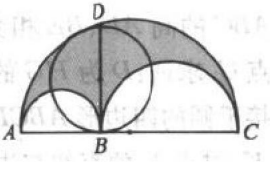
(1) 正 n 边形的边数变为原来的 2 倍时，它的每个内角增加_____°，每个外角减少_____°，每个中心角减少_____°.

(2) 如果正三角形、正四边形、正六边形和圆的周长都等于 a，那么它们的面积分别是_____、_____、_____和_____.

21. 半径为 5cm 的圆上有 10 个点，相邻两点的距离相等. 采用如图所示的直角坐标系，求各点的坐标(精确到 0.01cm).



(第 21 题)

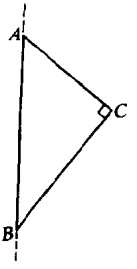


(第 22 题)

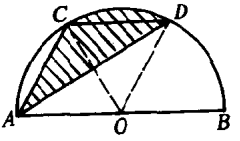
22. 如图，B 是 AC 上的一点，分别以 AB、BC、AC 为直径作半圆. 从 B 作 $BD \perp AC$，与半圆相交于 D. 求证：图中阴影部分的面积等于以 BD 为直径的圆的面积.

23. 一个矩形纸片两边长分别为 10cm、8cm. 用它做一个圆柱的侧面，所得的圆柱的表面积是多少?(注意，有两种情况)

24. 如图，一个直角三角形两条直角边长分别为 3cm、4cm，以它的斜边所在直线为轴旋转一周，得到一个几何体. 求这个几何体的表面积.



（第 24 题）

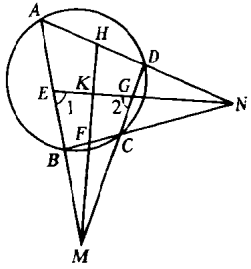


（第 25 题）

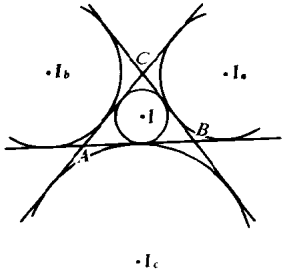
25. 如图，已知半圆的直径 $AB = 40\text{cm}$，点 C、D 是这个半圆的三等分点. 求弦 AC、AD 和 $\overset{\frown}{CD}$ 围成的图形的面积 S.（提示：证 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle OCD}$.）

B 组

1. $\triangle ABC$ 的高 AD、BE 相交于点 H，AD 的延长线交外接圆于点 G. 求证：D 为 HG 的中点.
2. 内接于圆的四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 垂直相交于点 K，过点 K 的直线与边 AD、BC 分别相交于点 H 和 M. 求证：(1) 如果 $KH \perp AD$，那么 $CM = MB$；
   (2) 如果 $CM = MB$，那么 $KH \perp AD$.
3. 如图，延长圆的内接四边形 $ABCD$ 的两组对边，分别相交于点 M、N. 求证：所成的 $\angle AMD$ 和 $\angle ANB$ 的平分线互相垂直.（提示：证明图中 $\angle 1 = \angle 2$.）
4. 如图，$\triangle ABC$ 的三条边所在的直线分全平面成7 个区域，在其中的 4 个里各有一个和三边所在的直线都相切的圆（$\odot I$、$\odot I_a$、$\odot I_b$、$\odot I_c$）. 这 4 个圆的圆心各在哪些角平分线上？



（第 3 题）



（第 4 题）

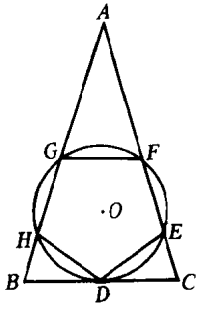
5. 求证：经过相交两圆的一个交点的那些直线，被两圆所截得的线段中，平行于连心线的那一条线段最长.

*6. (1) 两圆内切于点 P，大圆的弦 AD 交小圆于点 B 及 C.

求证：$\angle APB = \angle CPD$；

(2) 两圆内切于点 P，大圆的弦 AB 切小圆于点 C. 求证：$\angle APC = \angle CPB$.

7. 已知：如图，等腰三角形 ABC 的顶角 $\angle A = 36°$，$\odot O$ 和底边相切于中点 D，并过两腰的中点 G、F，又和两腰相交于点 H、E. 求证：五边形 $DEFGH$ 是正五边形.



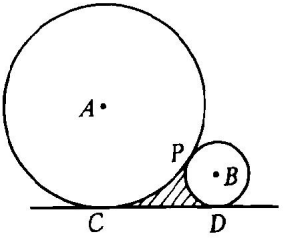
（第 7 题）

8. 已知：$\odot O$ 的半径为 R，它的内接正 n 边形的边长为 a.

求证：$\odot O$ 的外切正 n 边形的边长 $b = \dfrac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$.

9. 已知：如图，$\odot A$ 和 $\odot B$ 外切于点 P，

它们的半径分别为 0.6m、0.2m，CD 是它们的外公切线，切点分别为 C、D. 求：$\overset{\frown}{CP}$、$\overset{\frown}{DP}$ 及外公切线 CD 围成的面积 S_{PCD}（精确到 0.001m²）.（提示：连结 AB、AC、BD. 计算直角梯形 $ACDB$ 的面积.）



（第 9 题）

10. 已知：在半径为 R 的圆中，内接正 n 边形的边长为 a.

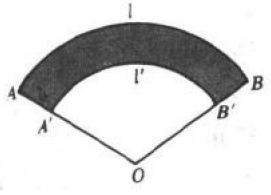
求证：这个圆的内接正 $2n$ 边形的边长

$$a' = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

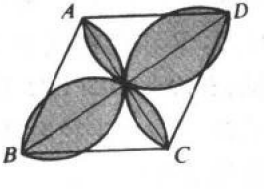
11. 如图，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的圆心都是 O，$AA' = d$，$\overset{\frown}{AB}$ 的长是 l，$\overset{\frown}{A'B'}$ 的长是 l'. 求证：

(1) $\angle O = \dfrac{l - l'}{d} \times \dfrac{180}{\pi}$ 度；

(2) $S_{AA'B'B} = \dfrac{1}{2}(l + l')d$.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 已知：如图，菱形 $ABCD$ 的两条对角线长分别为 a、b，分别以每边为直径向形内作半圆. 求 4 条半圆弧围成的花瓣形面积（阴影部分的面积）.

自我测验七

（满分 120 分，时间 45 分）

1.（每小题 3 分，共 12 分）判断题：

（1）顶点在圆周上的角叫做圆周角；（　　）

（2）圆的内接平行四边形一定是矩形；（　　）

（3）与直径垂直的直线是圆的切线；（　　）

（4）两个边数相同的正多边形一定相似.（　　）

2.（每小题 6 分，共 18 分）选择题：

（1）下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（　　）

(A) 等腰梯形.　　(B) 平行四边形.

(C) 等边三角形.　　(D) 圆.

（2）已知两圆的半径分别为 5 和 2，圆心距为 3，那么这两个圆的位置关系是（　　）

(A) 内含.　　(B) 内切.

(C) 相交.　　(D) 外切.

（3）等边三角形的外接圆的面积是内切圆面积的（　　）

(A)2 倍.　(B)3 倍.　(C)4 倍.　(D)5 倍.

3.（每小题 8 分，共 32 分）填空：

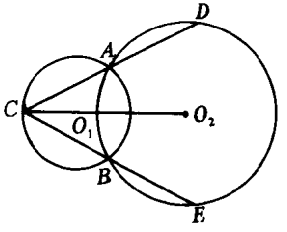
（1）如果 $\odot O$ 的半径为 5cm，一条弦长为 8cm，那么这条弦的弦心距为_____cm.

（2）如果正六边形的半径为 R，那么它的面积为_____.

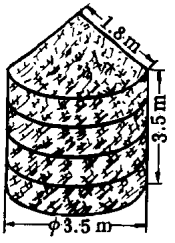
（3）在半径为 R 的圆中，150° 的圆心角所对的弧长为____.

（4）半径为 R，面积为 S 的扇形的圆心角的度数为____.

4. (19分) 已知如图，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A 和 B，O_2O_1 的延长线交 $\odot O_1$ 于点 C，CA、CB 的延长线分别和 $\odot O_2$ 相交于点 D、E. 求证：$AD = BE$.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. (19分) 要造一个如图的粮仓，其上部是圆锥形，下部是圆柱形. 如果每平方米需用芦席 2.5 平方米，按图中尺寸计算共需芦席多少(精确到 $1m^2$).

附加题

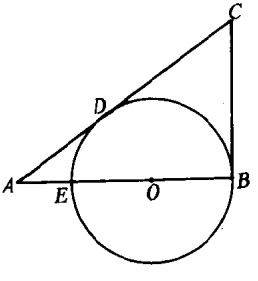
***6.** (每小题 2 分，共 4 分) 填空：

(1) 到直线 l 距离等于 5cm 的点的轨迹是_____；

(2) 在 $\odot O$ 中，弦 AB 和 CD 相交于点 P，如果 $AP = 3$cm，$PB = 5$cm，$CP = 2$cm，那么 $CD =$ _____ cm.

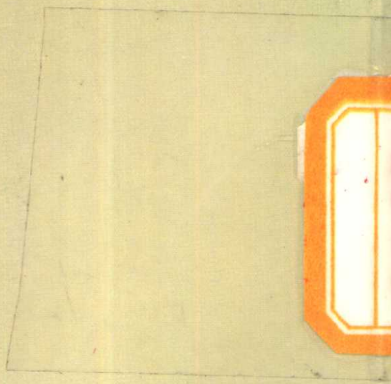
***7.** (6分) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，$\angle A$ 是锐角. 用反证法证明 $\angle B$ 一定是锐角.

***8.** (10分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$. O 是 AB 上一点，以 O 为圆心，OB 为半径的圆与 AB 交于点 E，与 AC 切于点 D，$AD = 2$，$AE = 1$，求 CD 的长.



(第 8 题)

封面设计　陈圣西
图片摄影　路　遥



ISBN 7-107-02281-4

9 787107 022814 >

ISBN 7 - 107 - 02281 — 4
G · 4117(课)　定价 4.40元